

高中数学

常用二级结论

- 记住常用二级结论，提升小题的解题速度
- 体会证明过程，为解答大题提供思路引导



Contents 目录

第一部分	函数	1
第二部分	不等式	3
第三部分	导数中常用的不等式	4
第四部分	三角函数与解三角形	7
第五部分	平面向量	9
第六部分	数列	11
第七部分	立体几何	14
第八部分	解析几何	15
第九部分	统计与概率	21
例题答案与解析		22

第一部分 函数

1. 函数的奇偶性

(1) 若函数的定义域关于原点对称,则有:

① $f(x)$ 是偶函数: $f(-x)=f(x)=f(|x|)$, 图象关于 y 轴对称.

② $f(x)$ 是奇函数: $f(-x)=-f(x)$, 图象关于原点对称. 若 $x \in \mathbf{R}$, 则 $f(0)=0$. 奇函数在对称区间上的最大值与最小值的和为 0.

(2) 奇函数 $\times$ 奇函数是偶函数, 偶函数 $\times$ 偶函数是偶函数, 奇函数 $\times$ 偶函数是奇函数.

例 1 已知函数 $f(x)=2^{|x|}+x^2-28$, 则不等式 $f(x^2-3x) \leq 4$ 的解集为 _____.

例 2 设函数 $f(x)=\frac{(x+1)^2+2019\sin x}{x^2+1}$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M+m=$ _____.

2. 函数图象的对称中心或对称轴

(1) 若函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(a+x)=2b-f(a-x)$, 则函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 (a, b) 对称.

(2) 若函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(a+x)=f(b-x)$, 则函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称.

例 3 函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(-x)=2$, $f(1+x)-f(1-x)=0$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)=x+1$, 则关于 x 的方程 $f(x)=\frac{1}{2022^x}$ 在 $x \in [0, 2022]$ 上的解的个数是 ()

A. 1010

B. 1011

C. 1012

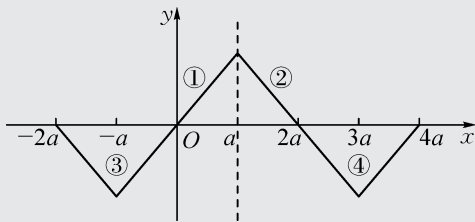
D. 1013

3. 函数的周期性结论

(1) 若函数 $f(x)$ 为偶函数, 且 $f(a+x)=f(a-x)$, 则 $2a$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期.

(2) 若函数 $f(x)$ 为奇函数, 且 $f(a+x)=f(a-x)$, 则 $4a$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期.

证明思路 1: $f(x)$ 的图象关于原点对称, 关于直线 $x=a$ 对称. 交替使用这两个对称, 可以画出 $f(x)$ 的草图, 可以看出周期为 $4a$.



证明思路 2(代数法): 因为 $f(a+x)=f(a-x)$, 所以 $f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]$, 即 $f(x)=f(2a-x)$. 又 $f(-x)=-f(x)$, 所以 $f(-x)=-f(2a-x)$, 即 $f(x)=-f(2a+x)$, 所以 $f(2a+x)=-f(4a+x)$, 得 $f(x)=f(x+4a)$.

(3) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(a-x)$, 且 $f(b+x)=f(b-x)$, 则 $2|a-b|$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期.

(4) 若 $f(a+x)=-f(x)$, 则 $2a$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期.

(5) 若 $f(a+x)=-\frac{1}{f(x)}$, 则 $2a$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期.

证明思路: $f(2a+x)=-\frac{1}{f(a+x)}=-\frac{1}{-\frac{1}{f(x)}}=f(x)$.

(6) 若 $f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$, 则 $4a$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期.

证明思路: $f(x+2a) = \frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)} = \frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}} = -\frac{1}{f(x)}$, 由(5)可得结论.

例 4 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 若 $f(x+1)$ 为偶函数, 且 $f(-1)=5$, 则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2021)=$ ()
A. 10 B. -10 C. -5 D. 5

4. 反函数结论

若函数 $y=f(x)$ 是定义在非空数集 D 上的单调函数, 则存在反函数 $y=f^{-1}(x)$. 特别地, $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 互为反函数, 两函数图象在同一直角坐标系内关于直线 $y=x$ 对称, 即点 $(x_0, f(x_0))$ 与点 $(f(x_0), x_0)$ 分别在函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象上.

例 5 已知 x_1, x_2 分别是函数 $f(x)=e^x+x-2, g(x)=\ln x+x-2$ 的零点, 则 $e^{x_1}+\ln x_2$ 的值为 ()
A. $e^2+\ln 2$ B. $e+\ln 2$ C. 2 D. 4

5. 部分特殊函数的性质

$$(1) f(x) = \ln x - \frac{x+1}{x-1}, f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

$$(2) f(x) = |\ln x|, \text{若 } 0 < a < b \text{ 且 } f(a) = f(b), \text{则 } ab = 1.$$

$$(3) f(x) = |\ln x| + \left(x + \frac{1}{x}\right), \text{则 } f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

例 6 设实数 a, b 是关于 x 的方程 $|\lg x| = c$ 的两个不同实根, 且 $a < b < 10$, 则 abc 的取值范围是_____.

第二部分 不等式

1. 糖水不等式

$$\frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m} (a > b > 0, m > 0), \frac{b}{a} > \frac{b+m}{a+m} (0 < a < b, m > 0).$$

2. 重要不等式

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} (a > 0, b > 0).$$

从左往右依次是正数 a, b 的调和平均数、几何平均数、算术平均数、平方平均数.

3. 基本不等式及推广

若 $a > 0, b > 0$, 则 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 即 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (当且仅当 $a=b$ 时等号成立).

若 $a > 0, b > 0, c > 0$, 则 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立).

推广: $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ (当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立).

例 1 已知 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{2a+b}{\sqrt{4a^2+b^2}-\sqrt{ab}}$ 的最大值是 _____.

4. 几个著名不等式

(1) 幂平均不等式:

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \geq \frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2.$$

(2) 绝对值三角不等式:

$$||a|-|b|| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b| \text{ (注意取等号的条件).}$$

(3) 二维形式的三角不等式:

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2} \geq \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} (x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbf{R}).$$

(4) 二维形式的柯西不等式:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2 (a, b, c, d \in \mathbf{R}), \text{ 当且仅当 } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ 时, 等号成立.}$$

(5) 三维形式的柯西不等式:

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2, \text{ 当且仅当 } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \text{ 时, 等号成立.}$$

(6) 一般形式的柯西不等式:

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2, \text{ 当且仅当 } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} \text{ 时, 等号成立.}$$

(7) 向量形式的柯西不等式:

设 α, β 是两个向量, 则 $|\alpha \cdot \beta| \leq |\alpha| |\beta|$, 当且仅当 α, β 共线时, 等号成立.

(8) 排序不等式(排序原理):

设 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ 为两组实数. $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的任一排列, 则 $a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1 \leq a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n \leq a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ (反序和 $\leq$ 乱序和 $\leq$ 顺序和), 当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时, 反序和等于顺序和.

(9) 琴生不等式(特例: 凸函数、凹函数):

若定义在某区间上的函数 $f(x)$, 对于定义域中任意两点 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ 有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ (或 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$), 则称 $f(x)$ 为凹(或凸)函数.

例 2 函数 $y=5\sqrt{x-1}+\sqrt{10-2x}$ 的最大值为 _____.

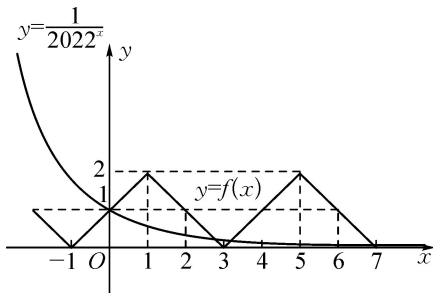
例题答案与解析

第一部分 函数

例1 $[-1, 4]$ $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = 2^{|-x|} + (-x)^2 - 28 = 2^{|x|} + x^2 - 28 = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为偶函数. 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2^x + x^2 - 28$ 单调递增. 因为 $f(4) = 2^4 + 4^2 - 28 = 4$, 则 $f(x^2 - 3x) \leq 4 = f(4)$, 所以 $f(|x^2 - 3x|) \leq f(4)$, 则 $|x^2 - 3x| \leq 4$, 即 $-4 \leq x^2 - 3x \leq 4$, 因为 $x^2 - 3x + 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$, 故 $x^2 - 3x \geq -4$ 恒成立, 由 $x^2 - 3x \leq 4$ 可得 $x^2 - 3x - 4 \leq 0$, 解得 $-1 \leq x \leq 4$.

例2 2 由题意 $f(x) = \frac{(x+1)^2 + 2019\sin x}{x^2 + 1} = 1 + \frac{2x + 2019\sin x}{x^2 + 1}$, 令 $g(x) = f(x) - 1 = \frac{2x + 2019\sin x}{x^2 + 1}$, 所以 $g(x)$ 的最大值为 $M - 1$, 最小值为 $m - 1$. 又 $g(-x) = \frac{-2x - 2019\sin x}{x^2 + 1} = -g(x)$, 所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为奇函数, 所以 $M - 1 + m - 1 = 0$, 即 $M + m = 2$.

例3 B 因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(-x) = 2$, 所以函数 $f(x)$ 关于点 $(0, 1)$ 对称, 因为 $f(1+x) - f(1-x) = 0$, 即 $f(1+x) = f(1-x)$, 所以函数 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称, 因为当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x + 1$, 所以结合函数性质, 作出函数图象, 如图所示.

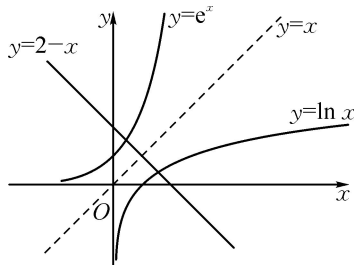


由图可知, 函数 $f(x)$ 为周期函数, 周期 $T=4$, 由于函数在一个周期 $x \in [2, 6)$ 内, $y = f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2022^x}$ 有 2 个交点, 在 $x \in [0, 2)$ 上, $y = f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2022^x}$ 有 1 个交点, 所以根据函数周期性可知, 当 $x \in [0, 2022]$ 时, $y = f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2022^x}$ 有 $2 \times \frac{2020}{4} + 1 = 1011$ 个交点. 所以关于 x 的方程 $f(x) = \frac{1}{2022^x}$ 在 $x \in [0, 2022]$ 上的解的个数是 1011.

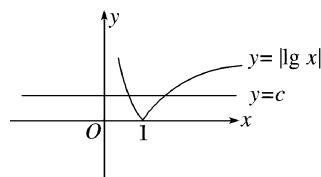
例4 C 因为 $f(x+1)$ 为偶函数, 所以 $f(x+1) = f(-x+1)$, 即 $f(2-x) = f(x)$, 因为函数 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(2+x) = -f(x)$, 即 $f(4+x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 4. 因为 $f(1) = -f(-1) = -5$,

$f(2) = -f(0) = 0$, $f(3) = -f(1) = 5$, $f(4) = f(0) = 0$, 所以 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0$, 故 $f(1) + f(2) + \dots + f(2021) = 505 \times 0 + f(2021) = f(1) = -5$.

例5 C 根据题意, 函数 $f(x) = e^x + x - 2$ 的零点为函数 $y = e^x$ 与 $y = 2 - x$ 的交点的横坐标, 则两个函数图象的交点为 (x_1, e^{x_1}) , 函数 $g(x) = \ln x + x - 2$ 的零点为函数 $y = \ln x$ 与 $y = 2 - x$ 的交点的横坐标, 则两个函数图象的交点为 $(x_2, \ln x_2)$, 又由函数 $y = e^x$ 与函数 $y = \ln x$ 互为反函数, 其图象关于直线 $y = x$ 对称, 而直线 $y = 2 - x$ 也关于直线 $y = x$ 对称, 则点 (x_1, e^{x_1}) 和 $(x_2, \ln x_2)$ 也关于直线 $y = x$ 对称 (如图), 则 $x_1 = \ln x_2$, 则 $e^{x_1} + \ln x_2 = e^{x_1} + x_1 = 2$.



例6 $(0, 1)$ 由题意知, 在 $(0, 10)$ 上, 函数 $y = |\lg x|$ 的图象和直线 $y = c$ 有两个不同交点 (如图), 所以 $ab = 1$, $0 < c < \lg 10 = 1$, 所以 abc 的取值范围是 $(0, 1)$.



第二部分 不等式

例1 $2\sqrt{2}$ 因为 $a > 0, b > 0$, 所以 $\sqrt{\frac{4a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{2a + b}{2}$, 即 $\sqrt{4a^2 + b^2} \geq \frac{\sqrt{2}(2a + b)}{2}$, 当且仅当 $2a = b$ 时, 等号成立; 又 $\sqrt{2ab} \leq \frac{2a + b}{2}$, 即 $\sqrt{ab} \leq \frac{2a + b}{2\sqrt{2}}$, 当且仅当 $2a = b$ 时, 等号成立. 故 $\sqrt{4a^2 + b^2} - \sqrt{ab} \geq \frac{\sqrt{2}(2a + b)}{2} - \frac{2a + b}{2\sqrt{2}} = \frac{2a + b}{2\sqrt{2}}$, 则 $\frac{2a + b}{\sqrt{4a^2 + b^2} - \sqrt{ab}} \leq \frac{2a + b}{\frac{2a + b}{2\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $2a = b$ 时, 等号成立.

例2 $6\sqrt{3}$ $y^2 = (5\sqrt{x-1} + \sqrt{10-2x})^2 = (5\sqrt{x-1} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{5-x})^2 \leq (5^2 + 2)(x-1 + 5-x) = 108$, 当且仅当 $\frac{5}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-x}}$, 即 $x = \frac{127}{27}$ 时, 等号成立, 所以 $y \leq 6\sqrt{3}$.