

你有能力拿到的分数

1~7, 9, 10, 12, 13, 15~17, 18(1), 19(1), 合计 108 分.

上述分数是基础题和中档题的分数, 是通过科学的训练能够拿到的分数, 你拿到了吗?



1. C $\frac{2-i}{i} = \frac{(2-i)(-i)}{i \times (-i)} = -1-2i$.

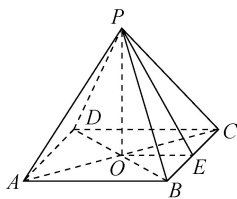
2. C 由 $B = \{x | x^2 - 4x < 0\}$, 得 $B = \{x | 0 < x < 4\}$, 故 $A \cap B = [2, 4)$.

3. A 函数 $f(x) = \sin x$ 的图象先向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到函数 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象, 将 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 图象上所有点的纵坐标保持不变, 横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$, 得到函数 $g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象, 所以 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. A 因为 $a//b$ 的充要条件是 $x^2 = 2 - x$, 解得 $x = -2$ 或 $x = 1$, 所以“ $x = -2$ ”是“ $a//b$ ”的充分不必要条件.

5. B 因为 $500 \times 60\% = 300$, 所以竞赛成绩不低于 80 分的人数至少为 $500 - 300 = 200$.

6. D 如图, 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, 点 O 是底面中心, E 是 BC 的中点, 则 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, PE 是斜高, $\angle PBO$ 即为侧棱 PB 与底面所成的角. 设底面边长为 a , $PE = h'$, 由题意, 得 $4 \times \frac{1}{2}ah' = 2a^2$, 则 $h' = a$. 又 $OE = \frac{1}{2}a$, 所以 $PO = \sqrt{PE^2 - OE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, 而 $OB = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, 所以 $PB = \sqrt{PO^2 + OB^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$, 故 $\cos \angle PBO = \frac{OB}{PB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.



7. C **审题指导** 求 $\frac{x_1}{x_2}$ 的最大值, 这里含有两个变量, 若变量

x_1, x_2 之间没有关系, 则 $\frac{x_1}{x_2}$ 也就没有最大值. 因此我们必须寻找到 x_1, x_2 之间的关系, 这是解题的关键, 也是突破口. 因为 x_1 是函数 $f(x) = e^x + e(x-a-1)$ (e 为自然对数的底数) 的零点, 所以 x_1 必与参数 a 有关, 同理 x_2 也必与参数 a 有关. 这样 x_1 与 x_2 就间接地通过参数 a 联系在一起. 如果能消去参数 a , 就能得到 x_1, x_2 之间的直接关系, 并进一步化简, 再运用消元思想, 将求 $\frac{x_1}{x_2}$ 的最大值的二元问题, 转化为一元问题, 那就简单了.

因为 x_1 是函数 $f(x)$ 的零点, 所以 $e^{x_1} + e(x_1 - a - 1) = 0$, 即 $e^{x_1-1} + (x_1 - 1) = a$ ①. 又因为 x_2 是函数 $g(x)$ 的零点, 所以 $\ln(x_2 e^{x_2}) - a = 0$, 即 $\ln x_2 + x_2 = a$ ②. 由①②消去 a 得 $e^{x_1-1} +$

$(x_1 - 1) = \ln x_2 + x_2$, 即 $e^{x_1-1} + (x_1 - 1) = e^{\ln x_2} + \ln x_2$ ③. 设函数 $h(x) = e^x + x$, 则③式可表示为 $h(x_1 - 1) = h(\ln x_2)$. 因为 $h'(x) = e^x + 1 > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $x_1 - 1 = \ln x_2$, 即 $x_2 = e^{x_1-1}$, 则 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1}{e^{x_1-1}}$. 设函数 $\varphi(x) = \frac{x}{e^{x-1}}$, 则 $\varphi'(x) = \frac{1-x}{e^{x-1}}$, 当 $x < 1$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增; 当 $x > 1$ 时, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $\varphi(x)_{\max} = \varphi(1) = 1$, 即 $\frac{x_1}{x_2}$ 的最大值为 1.

解后反思 对于求解既含有指数式 e^x , 同时又含有对数式 $\ln x$ 的问题, 我们经常利用 $x = e^{\ln x} = \ln e^x$ 将对数式与指数式进行互化, 从而构造同构式来解决问题.

8. A **审题指导** 求 AB 中点横坐标的最小值, 首先我们要选择好变量表示 AB 中点的横坐标, 再选择是用函数知识还是用不等式知识求最小值. AB 中点的横坐标直接与 A, B 两点的横坐标有关, 而 A, B 两点横坐标又由直线 AB 确定, 具体来说, 就是和直线 AB 的斜率 k 和纵截距 m 有关, 这样我们可以通过根与系数的关系以及中点坐标公式, 用 k 和 m 来表示 AB 中点的横坐标, 又由 $|AB| = 6$, 可以得到 k 和 m 满足的等量关系, 从而求出最小值. 注意一些细节, 如 A, B 为双曲线右支上两点, 不过这样有点小题大做的嫌疑, 我们也可以从 $|FA| + |FB| \geq |AB|$, 结合圆锥曲线的第二定义来处理, 这便有了两种解法.

解法 1 (代数法) 当直线 AB 的斜率不存在时, 直线 AB 的方程为 $x = \sqrt{10}$, 此时 AB 的中点的横坐标为 $\sqrt{10}$; 当直线 AB 的斜率存在时, 设直线 AB 的方程为 $y = kx + m$, 联立 $\begin{cases} y = kx + m, \\ x^2 - y^2 = 1, \end{cases}$ 消去 y , 得 $(1-k^2)x^2 - 2kmx - m^2 - 1 = 0$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{2km}{1-k^2}, x_1 x_2 = \frac{m^2+1}{k^2-1} > 0$, 所以 $k^2 > 1$.

【启发式分析】 注意到 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 中含有两个变量 k, m , 为此, 利用 $|AB| = 6$ 消去一个变量, 从而简化问题.

因为 $|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{\sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{4m^2 + 4 - 4k^2}}{|1-k^2|} = \frac{2\sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{m^2 + 1 - k^2}}{k^2 - 1} = 6$, 所以 $m^2 = \frac{10k^4 - 18k^2 + 8}{k^2 + 1} = \frac{9(k^2 - 1)^2}{k^2 + 1} + k^2 - 1$.

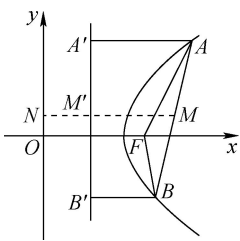
【启发式分析】 注意到 $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{km}{1-k^2}$ 中的变量 m 为一次形式, 为此, 将它进行平方加以处理.

因为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{km}{1-k^2}\right)^2 = \frac{k^2}{(1-k^2)^2} \left[\frac{9(k^2-1)^2}{k^2+1} + k^2 - 1\right] = \frac{9k^2}{k^2+1} + \frac{k^2}{k^2-1}$.

【启发式分析】 将 k^2 作为一个整体, 可利用导数来求最值.

令 $t = k^2 > 1$, 设 $f(t) = \frac{9t}{t+1} + \frac{t}{t-1}$, 则 $f'(t) = \frac{9}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t-1)^2} = \frac{4(2t-1)(t-2)}{(t+1)^2(t-1)^2}$. 当 $t \in (1, 2)$ 时, $f'(t) < 0$, $f(t)$ 单调递减; 当 $t \in (2, +\infty)$ 时, $f'(t) > 0$, $f(t)$ 单调递增. 故当 $t = 2$ 时, $f(t)_{\min} = 8$, 所以 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)_{\min} = 2\sqrt{2}$.

解法 2(第二定义法+几何法) 由圆锥曲线的统一定义知,双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 右支上的点到右焦点的距离与到准线 $x = \frac{a^2}{c}$ 的距离之比等于离心率. 因为双曲线 C 为等轴双曲线,所以离心率 $e = \sqrt{2}$. 如图,设双曲线右焦点为 F ,连接 AF, BF ,取 AB 的中点 M ,过点 A, B, M 分别作准线 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的垂线,垂足分别为 A', B', M' ,则 $\frac{|BF|}{|BB'|} = \frac{|AF|}{|AA'|} = e = \sqrt{2}$,故 $|MM'| = \frac{1}{2}(|AA'| + |BB'|) = \frac{1}{2} \left(\frac{|AF| + |BF|}{e} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(|AF| + |BF|) \geq \frac{\sqrt{2}}{4}|AB| = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 6 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,当且仅当 A, B, F 三点共线时, $|MM'|$ 取最小值,故此时中点 M 的横坐标的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.



解后反思 两种解法中,解法 1 是基础解法,它需要学生有很强的运算能力,以及相应的运算技巧和方法;解法 2 对学生的思维能力要求相对较高,需要学生掌握圆锥曲线的统一定义,相对来讲,对运算能力的要求稍低.

9. BC 由于 $n=6$,故二项式系数最大的为 C_6^3 ,为第 4 项,故 A 错误; $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = 2^r C_6^r x^{6-r} x^{-\frac{1}{2}r} = 2^r C_6^r x^{6-\frac{3}{2}r}$, $r=0,1,2,3,4,5,6$,令 $6-\frac{3}{2}r=0$,解得 $r=4$,故常数项为第 5 项,故 B 正确;令 $6-\frac{3}{2}r=3$,则 $r=2$,故含 x^3 的项为 $2^2 C_6^2 x^3 = 60x^3$,故 C 正确;在 $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 中,令 $x=1$,得 $\left(1 + \frac{2}{\sqrt{1}}\right)^6 = 3^6 = 729$,故 D 错误.

解后反思 对于二项式定理这部分内容,重点要掌握好以下四点: 1. 二项式 $(a+b)^n$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$ ($r=0,1,2,\dots,n$); 2. 注意二项式系数与系数的区别与联系; 3. 赋值法; 4. 夹逼法(主要用于求系数的最值).

10. BCD 【启发式分析】注意到所研究的对象随着 α 的变化而变化,为此,只需将所要研究的对象表示为关于 α 的函数.

对于 A,若 $\alpha=30^\circ$, $AB \perp AC$,则 $\angle BAC=90^\circ$, $\angle CAD=60^\circ$,故 $\angle BAE=30^\circ$,在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $AB = \frac{AE}{\cos \angle BAE} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,故 A 错误;对于 B,因为 $AB \perp AC$,所以 $\angle BAE = \angle ACD = \alpha$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$,在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $AC = \frac{AD}{\sin \angle ACD} = \frac{2}{\sin \alpha}$,在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $AB = \frac{AE}{\cos \angle BAE} = \frac{1}{\cos \alpha}$,所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{2}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$,当 $\sin 2\alpha=1$,即

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, $(S_{\triangle ABC})_{\min} = 2$,故 B 正确;对于 C,若 $\triangle ABC$ 为等边三角形,则 $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle CAD = 90^\circ - \alpha$,所以 $\angle BAE = 180^\circ - 60^\circ - (90^\circ - \alpha) = 30^\circ + \alpha$,在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $AC = \frac{AD}{\sin \angle ACD} = \frac{2}{\sin \alpha}$,在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $AB = \frac{AE}{\cos \angle BAE} = \frac{1}{\cos(30^\circ + \alpha)}$,因为 $AC = AB$,所以 $\frac{2}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos(30^\circ + \alpha)}$,即 $2 \cos(30^\circ + \alpha) = \sin \alpha$,所以 $\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha = \sin \alpha$,即 $\sqrt{3} \cos \alpha = 2 \sin \alpha$,故 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,故 C 正确;对于 D,若 $\angle BAC = 60^\circ$,由 C 选项的分析知, $AC = \frac{2}{\sin \alpha}$, $AB = \frac{1}{\cos(30^\circ + \alpha)}$,所以 $\frac{1}{AB} + \frac{2}{AC} = \cos(30^\circ + \alpha) + \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha = \sin(\alpha + 60^\circ) \leq 1$,当 $\alpha = 30^\circ$ 时,等号成立,故 D 正确.

11. ACD 【审题指导】此题四个选项的确定,都与数列 $\{a_n\}$ 的通项公式有关,那如何求通项公式呢? 研究数列通常从相邻项的关系开始,例如等差数列满足相邻两项的差为常数,等比数列满足相邻两项的比为常数,这里能否从相邻项的关系考虑呢? 此题数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$,有 $\frac{1}{a_{n+m}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_m}$ 成立,该等式中涉及三项,但因为 $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$,所以我们不妨固定一项,如令 $m=1$,则可转化为相邻两项之间的关系,从而知晓数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 为何种数列.

对于选项 A,令 $m=1$,则 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1}$,所以 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 1$,即 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 1,公差为 1 的等差数列,所以 $\frac{1}{a_n} = n$,即 $a_n = \frac{1}{n}$,所以 $a_{2024} = \frac{1}{2024}$,故 A 正确. 对于选项 B,

【启发式分析】问题的本质就是求 $a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{n+1}^2$ 的取值范围,注意到数列 $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ 无法直接求和,为此,可利用不等式 $\frac{1}{n^2} = \frac{4}{4n^2} < \frac{4}{4n^2-1} = 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$ 进行放缩后求和.

因为 $\frac{1}{n^2} = \frac{4}{4n^2} < \frac{4}{4n^2-1} = 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$,所以 $a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{n+1}^2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} < 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{2n+3} < \frac{2}{3}$,故不存在 $n \in \mathbb{N}^*$,使得 $a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{n+1}^2 > \frac{2}{3}$,故 B 错误.

【启发式分析】注意到选项 C, D 所研究的不等式左边均为 n 项和的形式,为此,将不等式的右边也转化为 n 项和的形式,从而可将不等式的左、右两边进行逐项比较.

对于选项 C,根据对数的性质,可知 $\ln(n+1) = \ln \frac{n+1}{n} + \ln \frac{n}{n-1} + \ln \frac{n-1}{n-2} + \dots + \ln \frac{2}{1}$,只需 $\ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$,即 $\ln(x+1) < x$. 令 $f(x) = \ln(1+x) - x, x > -1$,则 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$,当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$,当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$,所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增,在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,所以 $f(x) \leq f(0) =$

0, 所以 $\ln(1+x) \leq x$, 当 $x=0$ 时, 取等号, 所以 $\ln\left(1+\frac{1}{1}\right) < 1$, $\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}, \dots, \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, 累加得 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1)$, 即 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n > \ln(n+1)$, 故 C 正确. 对于选项 D, 根据对数的性质, 可知 $\ln(n+1) = \ln \frac{n+1}{n} + \ln \frac{n}{n-1} + \ln \frac{n-1}{n-2} + \dots + \ln \frac{2}{1}$, 只需 $\ln \frac{n+1}{n} > \frac{1}{n+1}$, 即 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$, 即 $\ln(1+x) > \frac{1}{\frac{1}{1+x}} = \frac{x}{1+x}$. 令 $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}, x > 0$, 则 $g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x) > g(0) = 0$, 所以 $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$, 所以 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1}$, 所以 $\frac{1}{1+1} < \ln\left(1+\frac{1}{1}\right), \frac{1}{2+1} < \ln\left(1+\frac{1}{2}\right), \dots, \frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, 累加得 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1)$, 即 $a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n+1} < \ln(n+1)$, 故 D 正确.

解后反思 本题在求解的过程中应用了几种常见的放缩关系, 即

$$\frac{1}{n^2} = \frac{4}{4n^2} < \frac{4}{4n^2-1} = 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right), \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}, \ln \frac{n+1}{n} > \frac{1}{n+1},$$

其中后两种不等关系的本质就是函数不等式 $\ln x \leq x-1$, $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$ 的应用, 平时要注意这些知识的积累与应用.

12. $3\sqrt{3}$ 由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 得 $13 = a^2 + 4 - 4a \cos 30^\circ$, 即 $a^2 - 2\sqrt{3}a - 9 = 0$, 解得 $a = 3\sqrt{3}$ (负值舍去).

13. $2\sqrt{3}$ **解法 1 (几何法)** 【启发式分析】注意到直线 l 过定点, 为此, 当直线 l 与 OP 垂直时, 弦 AB 的长最小.

由题意, 得直线 $l: (2k+1)x - ky - 1 = (2x-y)k + x - 1 = 0$ 过定点 $P(1, 2)$, 圆 $O: x^2 + y^2 = 8$ 的圆心为 $O(0, 0)$, 半径为 $r = 2\sqrt{2}$, 连接 OP , 当直线 l 与 OP 垂直时, 弦 AB 的长最小, 且 $|OP| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, 所以 AB 长的最小值为 $2\sqrt{r^2 - |OP|^2} = 2\sqrt{3}$.

解法 2 (代数法) 【启发式分析】应用直线与圆相交时的弦长公式, 将 AB 表示为关于 k 的函数来求最值.

因为圆心 O 到直线 l 的距离 $d = \frac{1}{\sqrt{(2k+1)^2 + k^2}} = \frac{1}{\sqrt{5\left(k + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}}}$, 所以当 $k = -\frac{2}{5}$ 时, $d_{\max} = \sqrt{5}$, 此时 $|AB|_{\min} = 2\sqrt{r^2 - d_{\max}^2} = 2\sqrt{8-5} = 2\sqrt{3}$.

解后反思 解法 1 是利用直线过定点以及几何图形的直观性加以解决的, 此解法运算量小; 解法 2 是利用代数方法, 通过求函数的最值加以解决的, 相对而言, 运算量要比几何法大.

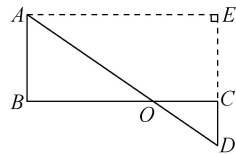
14. 6 解法 1 【启发式分析】解决本题的第一要素是确定 4 条线段的长度. 注意到 AB, CD 之间是一种“对称关系”, 为此, 可先确定 BC, AD 的长度, 同时, 注意到 AD 是 4 条线段中最长的, 为此, 需分 $x > 9$ 以及 $0 < x < 9$ 进行分类讨论.

当 $0 < x < 9$ 时, $AD = 9$, 若 $BC = 1$, 则不妨设 $AB = x, CD = 5$,

则 $\frac{x}{5} = \frac{BO}{1-BO} = \frac{AO}{9-AO}$, 解得 $BO = \frac{x}{x+5}, AO = \frac{9x}{x+5}$, 由 $AO^2 = BO^2 + AB^2$, 得 $\left(\frac{9x}{x+5}\right)^2 = \left(\frac{x}{x+5}\right)^2 + x^2$, 解得 $x = 4\sqrt{5} - 5$; 若 $BC = 5$, 则不妨设 $AB = x, CD = 1$, 则 $\frac{x}{1} = \frac{BO}{5-BO} = \frac{AO}{9-AO}$, 解得 $BO = \frac{5x}{x+1}, AO = \frac{9x}{x+1}$, 由 $AO^2 = BO^2 + AB^2$, 得 $\left(\frac{9x}{x+1}\right)^2 = \left(\frac{5x}{x+1}\right)^2 + x^2$, 解得 $x = 2\sqrt{14} - 1$; 若 $BC = x$, 则不妨设 $AB = 5, CD = 1$, 则 $\frac{5}{1} = \frac{BO}{x-BO} = \frac{AO}{9-AO}$, 解得 $BO = \frac{5x}{6}, AO = \frac{15}{2}$, 由 $AO^2 = BO^2 + AB^2$, 得 $\left(\frac{15}{2}\right)^2 = \left(\frac{5x}{6}\right)^2 + 25$, 解得 $x = 3\sqrt{5}$. 当 $x > 9$ 时, $AD = x$, 若 $BC = 1$, 则不妨设 $AB = 9, CD = 5$, 则 $\frac{9}{5} = \frac{BO}{1-BO} = \frac{AO}{x-AO}$, 解得 $BO = \frac{9}{14}, AO = \frac{9x}{14}$, 由 $AO^2 = BO^2 + AB^2$, 得 $\left(\frac{9x}{14}\right)^2 = \left(\frac{9}{14}\right)^2 + 81$, 解得 $x = \sqrt{197}$; 若 $BC = 5$, 则不妨设 $AB = 9, CD = 1$, 则 $\frac{9}{1} = \frac{BO}{5-BO} = \frac{AO}{x-AO}$, 解得 $BO = \frac{9}{2}, AO = \frac{9x}{10}$, 由 $AO^2 = BO^2 + AB^2$, 得 $\left(\frac{9x}{10}\right)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 81$, 解得 $x = 5\sqrt{5}$; 若 $BC = 9$, 则不妨设 $AB = 5, CD = 1$, 则 $\frac{5}{1} = \frac{BO}{9-BO} = \frac{AO}{x-AO}$, 解得 $BO = \frac{15}{2}, AO = \frac{5x}{6}$, 由 $AO^2 = BO^2 + AB^2$, 得 $\left(\frac{5x}{6}\right)^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 + 25$, 解得 $x = 3\sqrt{13}$. 综上所述, 满足条件的 x 共有 6 个不同的取值.

解法 2 【启发式分析】解法 1 是利用其中一个小直角三角形中的数量关系进行求解的, 比较烦琐, 为此考虑将四条线段放到一个直角三角形中进行求解.

如图, 将线段 BC 平移到 AE 处, 则 $\triangle ADE$ 是一个直角三角形, 此时 $AE = BC, DE = AB + CD$. 若 $0 < x < 9$, 则 $AD = 9$, 当 $AE = x$ 时, $x^2 + (1+5)^2 = 9^2$, 解得 $x = 3\sqrt{5}$; 当 $AE = 1$ 时, $1^2 + (x+5)^2 = 9^2$, 解得 $x = 4\sqrt{5} - 5$; 当 $AE = 5$ 时, $5^2 + (x+1)^2 = 9^2$, 解得 $x = 2\sqrt{14} - 1$. 若 $x > 9$, 则 $AD = x$, 当 $AE = 9$ 时, $9^2 + (1+5)^2 = x^2$, 解得 $x = 3\sqrt{13}$; 当 $AE = 1$ 时, $1^2 + (9+5)^2 = x^2$, 解得 $x = \sqrt{197}$; 当 $AE = 5$ 时, $5^2 + (1+9)^2 = x^2$, 解得 $x = 5\sqrt{5}$. 所以 x 的取值个数为 6.



解后反思 解法 1 是将问题转化到某个小三角形中进行求解, 其本质是各个击破的方法; 而解法 2 是将四条线段放到一个三角形中, 其本质是整体化归的方法. 很显然, 解法 2 比解法 1 更为简单、快捷, 因为它更好地揭示了问题的本质.

15. 解: (1) **解法 1** 设“汤姆的选择中有 200 米服务”为事件 A , “汤姆的选择中有 1500 米服务”为事件 B ,

$$\text{则 } P(A) = \frac{C_5^2}{C_6^2} = \frac{1}{2}, P(AB) = \frac{C_1^1}{C_6^2} = \frac{1}{5}, \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}. \quad (6 \text{ 分})$$

解法 2 设“汤姆的选择中有 200 米服务”为事件 A,“汤姆的选择中有 1500 米服务”为事件 B,

$$P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{C_4^1}{C_5^1} = \frac{4}{5}. \quad (6 \text{ 分})$$

(2) X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = \frac{C_5^3 C_4^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}, P(X=1) = \frac{C_5^2 C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{2},$$

$$P(X=2) = \frac{C_5^1 C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}, P(X=3) = \frac{C_5^0 C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}. \quad (10 \text{ 分})$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5}. \quad (13 \text{ 分})$$

(或随机变量 X 服从超几何分布 $X \sim H(3, 4, 10)$, 则 $E(X) = \frac{3 \times 4}{10} = \frac{6}{5}$)^{【5】}

规范书写 【1】若用期望公式,则必须先说明随机变量 X 服从超几何分布 $X \sim H(3, 4, 10)$, 否则扣 1 分.

16. (1) 证明: 因为 $\triangle ABD$ 是边长为 2 的正三角形, E 为 AD 的中点, 所以 $BE \perp AD$. (2 分)

又因为平面 $BEF \perp$ 平面 ABD , 平面 $BEF \cap$ 平面 $ABD = BE$, $AD \subset$ 平面 ABD ,^{【1】}

所以 $AD \perp$ 平面 BEF . (4 分)

(2) **解:** 如图, 取 AB 的中点 O, 连接 OD, OC.

由于底面三角形 ABC 为等腰直角三角形, $\triangle ABD$ 是边长为 2 的正三角形,

故 $OD \perp AB$, $OC \perp AB$.

又平面 $ABC \perp$ 平面 ABD , 且平面 $ABC \cap$ 平面 $ABD = AB$, $OD \subset$ 平面 ABD , 所以 $OD \perp$ 平面 ABC . (6 分)

因为 $OC \subset$ 平面 ABC , 所以 $OD \perp OC$, 所以 OC, OA, OD 两两垂直, 以 $\{\vec{OC}, \vec{OA}, \vec{OD}\}$ 为正交基底, 建立如图所示的空间直角坐标系 Oxyz, 则 $A(0, 1, 0)$, $B(0, -1, 0)$, $C(1, 0, 0)$, $D(0, 0, \sqrt{3})$,

$$\text{所以 } \vec{BC} = (1, 1, 0), \vec{CD} = (-1, 0, \sqrt{3}). \quad (8 \text{ 分})$$

设平面 BCD 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

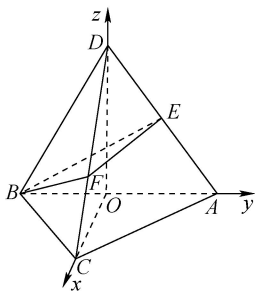
$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \vec{BC} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \vec{CD} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x + y = 0, \\ -x + \sqrt{3}z = 0, \end{cases} \text{ 令 } z = 1, \text{ 则 } x = \sqrt{3}, y =$$

$$-\sqrt{3}, \text{ 所以 } \mathbf{m} = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1). \quad (12 \text{ 分})$$

因为 $AD \perp$ 平面 BEF , 所以平面 BEF 的一个法向量为 $\vec{AD} = (0, -1, \sqrt{3})$. (13 分)

$$\text{设平面 } BEF \text{ 与平面 } BCD \text{ 的夹角为 } \theta, \text{ 则 } \cos \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \vec{AD} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \vec{AD}|}{|\mathbf{m}| |\vec{AD}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7} \times 2} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

故平面 BEF 与平面 BCD 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$. (15 分)



规范书写 【1】若此处没有交代“平面 $BEF \cap$ 平面 $ABD = BE$ ”和“ $AD \subset$ 平面 ABD ”, 则此步骤不得分.

17. 解: (1) 因为 $f'(x) = \cos x + e^x - 4$, 所以 $f'(0) = \cos 0 + e^0 - 4 = -2$,

所以 $f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = -2x + 1$. (2 分)

设直线 $y = -2x + 1$ 与 $y = g(x)$ 图象的切点为 $M(x_0, g(x_0))$.

因为 $g'(x) = 3x^2 - a$, 所以 $g(x)$ 在点 M 处的切线方程为 $y - g(x_0) = (3x_0^2 - a)(x - x_0)$,

$$\text{即 } y = (3x_0^2 - a)x - 2x_0^3 + 3,$$

$$\text{从而 } \begin{cases} 3x_0^2 - a = -2, \\ -2x_0^3 + 3 = 1, \end{cases} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x_0 = 1, \\ a = 5. \end{cases} \quad (6 \text{ 分})$$

(2) **【启发式分析】**注意到 $f(0) = 1 > 0$, $f(-\pi) = 4\pi + e^{-\pi} > 0$, 为此, 猜测函数 $f(x)$ 在 $(-\pi, 0]$ 上不存在零点, 从而将问题转化为研究函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上零点的个数问题.

因为 $f'(x) = \cos x + e^x - 4$,

当 $-\pi < x \leq 0$ 时, $-1 < \cos x \leq 1$, $0 < e^x \leq 1$, 所以 $f'(x) < 0$, 所以函数 $f(x)$ 单调递减,

所以 $f(x) \geq f(0) = 1$, 此时函数 $f(x)$ 无零点. (9 分)

【启发式分析】为研究函数 $f'(x) = \cos x + e^x - 4$ 的零点情况, 再次对它进行求导, 来研究它的单调性.

当 $x > 0$ 时, 设 $h(x) = \cos x + e^x - 4$, 则 $h'(x) = -\sin x + e^x > 1 - \sin x \geq 0$, 所以 $h(x)$, 即 $f'(x)$ 单调递增.

因为 $f'(1) = \cos 1 + e - 4 < 0$, $f'(2) = \cos 2 + e^2 - 4 > 0$,

所以存在 $x_0 \in (1, 2)$, 使得 $f'(x_0) = 0$. (11 分)

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. (13 分)

又 $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = \sin 1 + e - 4 < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上有一个零点.

又 $f(3) = \sin 3 + e^3 - 12 > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, 3)$ 上有一个零点.

综上所述, $f(x)$ 在 $(-\pi, +\infty)$ 上有 2 个零点. (15 分)

18. (1) 解: 因为 $A(-a, 0)$, 所以 $k_{PA} = \frac{2}{1+a} = \frac{2}{3}$, 解得 $a = 2$. (2 分)

又 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $c = \sqrt{3}$, 从而 $b = 1$, 所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. (4 分)

(2) **【启发式分析】**根据 $\triangle PBC$ 的面积来确定点 B, C 是解第 (2) 问的第一步, 关于 $\triangle PBC$ 的面积表示方法, 注意到 $MP \perp x$ 轴, 且将 $\triangle PBC$ 分为两个部分, 为此, $S_{\triangle PBC}$ 可表示为 $\frac{1}{2} |x_B - x_C| \cdot |MP|$ 最为简单.

证明: 易知直线 l 的斜率不为 0, 设直线 l 的方程为 $x = my + 1$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my + 1, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 整理得 } (m^2 + 4)y^2 + 2my - 3 = 0,$$

$$\Delta = 16(m^2 + 3) > 0, \text{ 则 } y_1 + y_2 = \frac{-2m}{m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-3}{m^2 + 4}, \quad (5 \text{ 分})$$

所以 $S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} |PM| |x_1 - x_2| = |m(y_1 - y_2)| = |m| \cdot$

$$\sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = |m| \cdot \frac{4\sqrt{m^2 + 3}}{m^2 + 4} = \frac{8}{5}, \text{解得 } m = \pm 1.$$

又直线 l 的斜率小于零, 所以 $m = -1$, 即直线 $l: y = -x + 1$,

则有 $5y^2 - 2y - 3 = 0$, 解得 $y = 1$ 或 $y = -\frac{3}{5}$, 从而有 $B(0,$

$$1), C\left(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right). \quad (7 \text{ 分})$$

【启发式分析】在解析几何中求角的关系, 一般有两种方法: 一是通过向量法来研究角, 二是通过夹角公式来研究角. 无论用哪种方法, 都需有相关的坐标, 为此, 联立直线 PB 的方程与椭圆方程, 解得点 D 的坐标.

证法 1 此时直线 PB 的方程为 $y = x + 1$.

$$\text{联立 } \begin{cases} y = x + 1, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 整理得 } 5x^2 + 8x = 0, \text{ 所以 } x = 0 \text{ 或 } x =$$

$$-\frac{8}{5}, \text{ 即 } x_D = -\frac{8}{5},$$

$$\text{所以 } y_D = -\frac{3}{5}, \text{ 即 } D\left(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right), \text{ 所以 } \overrightarrow{MD} = \left(-\frac{13}{5}, -\frac{3}{5}\right), \overrightarrow{MB} = (-1, 1),$$

$$\text{从而 } \cos \langle \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD} \rangle = \frac{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}}{|\overrightarrow{MB}| |\overrightarrow{MD}|} = \frac{\frac{13}{5} - \frac{3}{5}}{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{178}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{89}}. \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{又 } \overrightarrow{PB} = (-1, -1), \overrightarrow{PC} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{13}{5}\right), \text{ 所以 } \cos \langle \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC} \rangle =$$

$$\frac{\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}|} = \frac{\frac{13}{5} - \frac{3}{5}}{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{178}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{89}}.$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD} \rangle = \cos \langle \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC} \rangle, \text{ 即 } \angle BMD = \angle BPC. \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{证法 2} \quad \text{同证法 1 得 } D\left(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right), \text{ 所以 } k_{MD} = \frac{-\frac{3}{5} - 0}{-\frac{8}{5} - 1} =$$

$$\frac{3}{13}.$$

$$\text{又 } k_{BM} = -1, \text{ 所以 } \tan \angle BMD = \left| \frac{k_{BM} - k_{DM}}{1 + k_{BM} \cdot k_{DM}} \right| = \frac{8}{5}. \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } k_{PC} = \frac{2 + \frac{3}{5}}{1 - \frac{8}{5}} = -\frac{13}{3}, k_{PD} = k_{PB} = \frac{2 - 1}{1 - 0} = 1,$$

$$\text{所以 } \tan \angle BPC = \left| \frac{k_{PC} - k_{PB}}{1 + k_{PC} \cdot k_{PB}} \right| = \frac{8}{5} = \tan \angle BMD.$$

$$\text{所以 } \angle BMD = \angle BPC. \quad (10 \text{ 分})$$

证法 3 【启发式分析】从几何的角度, 通过寻找图形的几何性质加以证明.

$$\text{又 } k_{PB} = 1, k_{BC} = -1, \text{ 所以 } BC = BD, PB \perp BC. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{又 } PB = BM = \sqrt{2}, \text{ 所以 } \text{Rt} \triangle BPC \cong \text{Rt} \triangle BMD,$$

$$\text{所以 } \angle BMD = \angle BPC. \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{证法 4} \quad \text{又 } k_{PB} = 1, k_{BC} = -1, \text{ 所以由对称性可得 } D\left(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right), \text{ 所以 } DC \perp PM,$$

所以点 M 为 $\triangle PDC$ 的垂心. (9 分)

如图 1, 设 DM 与 PC 交于点 N , 所以 P, B, M, N 四点共圆, 则 $\angle BMD = \angle BPC$. (10 分)

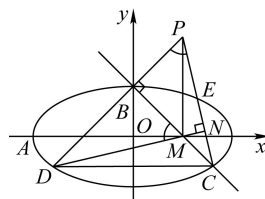


图 1

(3) 【启发式分析】本题首先要考虑的是 B, D, C, E 四点之间是怎样的从属关系, 即将哪些点看作是已知的, 哪些点看作是未知的? 根据所研究的对象——求直线 CD 的斜率, 我们将 C, D 两点看作是已知的, 从而只需将 B, E 两点用 C, D 的坐标表示出来即可.

解: 假设存在实数 λ , 使得 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{DC}$, 则 $BE \parallel DC$, 从而 $\overrightarrow{PB} = \lambda \overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PE} = \lambda \overrightarrow{PC}$, 由题意得 $\lambda \in (0, 1)$. 设 $C(x_2, y_2), D(x_3, y_3)$.

解法 1 (两椭圆的公共弦法) 由 $\overrightarrow{PB} = \lambda \overrightarrow{PD}$, 得 $B(\lambda x_3 + 1 - \lambda, \lambda y_3 + 2 - 2\lambda)$.

【启发式分析】如何处理 B, D 两点? 注意到它们是椭圆上的点, 由此得到过点 D 的直线方程.

$$\text{又点 } B, D \text{ 均在椭圆上, 所以 } \begin{cases} \frac{x_3^2}{4} + y_3^2 = 1, \\ \frac{(\lambda x_3 + 1 - \lambda)^2}{4} + (\lambda y_3 + 2 - 2\lambda)^2 = 1, \end{cases} \quad \text{可}$$

$$\text{得 } \begin{cases} \frac{x_3^2}{4} + y_3^2 = 1, \\ \lambda^2 \left(\frac{x_3^2}{4} + y_3^2 \right) + \frac{\lambda(1-\lambda)x_3}{2} + \frac{(1-\lambda)^2}{4} + 4\lambda(1-\lambda)y_3 + 4(1-\lambda)^2 = 1, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \frac{\lambda(1-\lambda)x_3}{2} + \frac{(1-\lambda)^2}{4} + 4\lambda(1-\lambda)y_3 + 4(1-\lambda)^2 = 1 - \lambda^2,$$

$$\text{整理得 } 2\lambda x_3 + 16\lambda y_3 + 13 - 21\lambda = 0, \quad (13 \text{ 分})$$

$$\text{同理可得 } 2\lambda x_2 + 16\lambda y_2 + 13 - 21\lambda = 0,$$

$$\text{所以直线 } DC \text{ 的方程为 } 2\lambda x + 16\lambda y + 13 - 21\lambda = 0, \quad (15 \text{ 分})$$

$$\text{所以直线 } DC \text{ 的斜率为 } -\frac{1}{8}. \quad (17 \text{ 分})$$

解法 2 (椭圆弦的性质) 【启发式分析】注意到 CD 为椭圆的弦, 且要求其斜率, 为此, 联想到椭圆中的中点弦相关的性质, 即 $k_{CD} \cdot k_{ON} = -\frac{b^2}{a^2}$ (N 为 CD 的中点, O 为坐标原点), 从而利用它来求解.

如图 2, 设 CD 的中点为 $N(x_0, y_0)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{x_2^2}{4} + y_2^2 = 1, \\ \frac{x_3^2}{4} + y_3^2 = 1, \end{cases} \quad \text{两式相减, 得 } \frac{(x_2 - x_3)(x_2 + x_3)}{4} + (y_2 -$$

$$y_3) \cdot (y_2 + y_3) = 0,$$

$$\text{所以 } \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} \cdot \frac{2y_0}{2x_0} = -\frac{1}{4}, \text{ 即 } k_{CD} \cdot k_{ON} = -\frac{1}{4}. \quad (13 \text{ 分})$$

$$\text{同理, 取 } BE \text{ 的中点 } G, \text{ 则 } k_{BE} \cdot k_{OG} = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{由 } BE \parallel DC, \text{ 得 } k_{CD} = k_{BE}, \text{ 所以 } k_{ON} = k_{OG},$$

$$\text{所以点 } O, N, G, P \text{ 共线, 所以 } k_{ON} = k_{OP} = 2, \quad (15 \text{ 分})$$

$$\text{则 } k_{CD} = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}. \quad (17 \text{ 分})$$

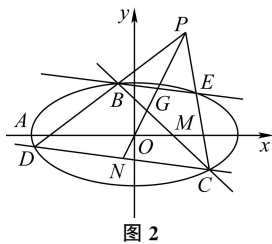


图 2

解后反思 在求解解析几何问题时,要注意以下问题:

1. 解析几何是用代数的方法来研究几何问题,因此,研究问题的基本方法就是联立方程组,通过将所要研究的对象转化为交点的坐标加以处理,但往往这种方法运算量比较大,有时很烦琐.

2. 为减少或避免通过代数方法所带来运算难、繁的问题,我们往往会从三个方面来寻找问题的突破口:

(1) 通过寻找条件与结论之间最简捷的通道,来简化运算的难度;

(2) 有效地利用图形的几何特征,通过应用图形的几何特征,从而减少运算量或直接解决问题;

(3) 有效地利用等价转化策略,充分利用圆锥曲线相关的性质来简化运算.

19. (1) 【启发式分析】研究数列问题的基本策略是确定其通项公式,为此,就需要确定其递推关系,从而通过它的递推关系来求得通项公式.

解: 因为 $b_n > 1$, 由 $b_{n+1} = \frac{1}{2} \left(b_n + \frac{1}{b_n} \right)$, 得 $c_{n+1} = \ln \frac{b_{n+1} + 1}{b_{n+1} - 1} =$

$$\ln \frac{\frac{1}{2} \left(b_n + \frac{1}{b_n} \right) + 1}{\frac{1}{2} \left(b_n + \frac{1}{b_n} \right) - 1} = \ln \left(\frac{b_n + 1}{b_n - 1} \right)^2 = 2 \ln \frac{b_n + 1}{b_n - 1} = 2c_n,$$

即 $c_{n+1} = 2c_n$, 又 $c_n \neq 0$, 所以 $\{c_n\}$ 为等比数列. (2分)

所以 $c_{n+1}^2 = c_n c_{n+2}$, 符合凸数列要求, 所以数列 $\{c_n\}$ 为凸数列. (4分)

(2) **【启发式分析】**注意到已知条件为 $|f(a_2) - f(a_3)| = 2$, 而所求为 $\sum_{i=2}^{10} |a_{i+1} - a_i|$, 为此, 需要将 $\sum_{i=2}^{10} |a_{i+1} - a_i|$ 放缩为含 $|f(a_2) - f(a_3)|$ 的形式, 由此不难想到用条件中的性质. 但由于条件中含有参数 λ , 故需要确定参数 λ 的取值范围.

证明: 因为 $a_{n+1} > a_n > 0$, 所以 $a_{n+1} \leq \sqrt{a_n a_{n+2}} < \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$, 所

以 $a_{n+1} - a_n < a_{n+2} - a_{n+1}$.

又 $a_n < a_{n+1}$, 所以 $|a_{n+1} - a_n| < |a_{n+2} - a_{n+1}|$. (5分)

因为 $|f(a_2) - f(a_3)| \leq \lambda^2 |a_2 - a_3| \leq |f(a_1) - f(a_2)|$,

且 $|f(a_3) - f(a_4)| \leq \lambda^3 |a_3 - a_4| \leq |f(a_2) - f(a_3)|$, 所以

$$\lambda^3 |a_3 - a_4| \leq \lambda^2 |a_2 - a_3|. \quad (7分)$$

又 $|a_2 - a_3| < |a_3 - a_4|$, 所以 $\lambda^3 |a_3 - a_4| < \lambda^2 |a_3 - a_4|$.

因为 $|a_3 - a_4| > 0$, 所以 $\lambda^3 < \lambda^2$.

又 $\lambda > 0$, 所以 $0 < \lambda < 1$. (9分)

所以 $|f(a_n) - f(a_{n+1})| \leq \lambda^n |a_n - a_{n+1}| < |a_n - a_{n+1}|$,

$$\text{所以 } \sum_{i=2}^{10} |a_{i+1} - a_i| = |a_{11} - a_{10}| + \cdots + |a_3 - a_2| > 9|a_3 - a_2| > 9|f(a_2) - f(a_3)| = 18. \quad (11分)$$

(3) **【启发式分析】**将 $|f(a_i) - f(a_j)|$ 转化为相邻的项的差并利用绝对值不等式进行放缩, 这样就可以利用题设条件, 转化为 a_i, a_j 之间的关系来研究.

证明: 当 $i = j$ 时, $|f(a_i) - f(a_j)| = |a_i - a_j|$, 结论显然成立; (12分)

当 $2 \leq i < j$ 时, 结合第(2)问结论 $|f(a_n) - f(a_{n+1})| < |a_n - a_{n+1}|$ 得 $|f(a_i) - f(a_j)| = |f(a_j) - f(a_{j-1}) + f(a_{j-1}) - f(a_{j-2}) + \cdots + f(a_{i+1}) - f(a_i)|$

$$\leq |f(a_j) - f(a_{j-1})| + |f(a_{j-1}) - f(a_{j-2})| + \cdots + |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \quad (14分)$$

$$< |a_j - a_{j-1}| + |a_{j-1} - a_{j-2}| + \cdots + |a_{i+1} - a_i|$$

$$= (a_j - a_{j-1}) + (a_{j-1} - a_{j-2}) + \cdots + (a_{i+1} - a_i) = |a_i - a_j|.$$

综上所述, $|f(a_i) - f(a_j)| \leq |a_i - a_j|$. (17分)

解后反思 本题属于新高考新背景下的新定义问题, 这种考题一般都比较高屋建瓴, 大多具有高等背景, 多取材于课本的课后阅读材料、大学课本、竞赛一试, 甚至直接改编于 IMO, 难度一般比较大. 解决此类问题时, 常可以通过以下方法或技巧来剖析问题:

1. 可通过举例子的方式, 将抽象的定义转化为具体简单的应用, 从而加深对信息的理解;

2. 可用自己的语言转述新信息所表达的内容, 如果能清晰描述, 那么说明对此信息的理解较为透彻;

3. 发现新信息与所学知识的联系, 并从描述中体会信息的本质特征与规律;

4. 如果新信息是课本知识的推广, 那么要关注此信息与课本中概念的不同之处, 以及什么情况下可以使用书上的概念.

湖北省武汉市 2025 届高三 上学期九月调研考试

A02

你有能力拿到的分数

1~7, 9, 10, 12, 13, 15~17, 18(1), 19(1)(2), 合计 112 分.

上述分数是基础题和中档题的分数, 是通过科学的训练能够拿到的分数, 你拿到了吗?



1. D 因为 $1 + \frac{2}{z} = 2 - i$, 所以 $\frac{2}{z} = 1 - i$, 则 $z = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+i$.

2. C $A = (-1, 3)$, $B = [0, +\infty)$, 所以 $A \cap B = [0, 3)$.

3. D $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^7$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_7^r (2x)^{7-r} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^r = (-1)^r 2^{7-r} C_7^r x^{7-3r}$, 令 $7-3r = -2$, 得 $r = 3$, 故含 $\frac{1}{x^2}$ 的项的系数为 $(-1)^3 2^4 C_7^3 = -16 \times 35 = -560$.

4. C 由 $S_{10} - S_3 = 35$, 得 $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 35$, 所以 $7a_7 = 35$, 即 $a_7 = 5$. 由 $a_3 + a_{10} = 7$, 得 $a_6 + a_7 = 7$, 则 $a_6 = 2$, 故公差为 $a_7 - a_6 = 3$.

5. B 设圆锥底面圆的半径为 r , 高为 h , 则 $\frac{\pi r^2}{2} \times 2r \times h = 2\pi$,

解得 $h = \frac{1}{2}$, 所以 $r = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故该圆锥的体积为 $\frac{1}{3} \pi \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8}$.

6. A **【启发式分析】**由于指数与对数的底数不确定, 故需对指数与对数的底数进行分类讨论.

当 $a > 1$ 时, 若 $x \leq a$, 则 $f(x) = a^{x-a}$ 为增函数, $f(x) \leq f(a) = 1$. 若 $x > a$, 则 $f(x) = \log_a(x+a) + 1$ 为增函数, 则 $f(x) > f(a) = \log_a 2a + 1 = \log_a 2 + 2 > 2$, 不符合题意; 当 $0 < a < 1$

故 $u^3 - 3u^2 - u + 3 < v < 4 - 4u$. (12分)

综上所述,点 P 的集合为

$$\left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x > 1, \\ 4 - 4x < y < x^3 - 3x^2 - x + 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^3 - 3x^2 - x + 3 < y < 4 - 4x \end{cases} \right\}. \quad (13分)$$

(2) 由题意知, $g'(x) = (x+1)e^x$,

所以在点 $(s, g(s))$ 处的切线方程为 $y = (s+1)e^s(x-s) + se^s$.

设 $Q(m, n) (m < 0)$ 为 $g(x)$ 的“3切点”,

则关于 s 的方程 $n = (s+1)e^s(m-s) + se^s$ 有 3 个不同的解.

令 $h(s) = (s+1)e^s(m-s) + se^s$, 则直线 $y = n$ 与曲线 $y = h(s)$ 恰有三个不同的交点,

$$h'(s) = (s+2)e^s(m-s) - e^s(s+2)(s-m).$$

当 $-2 < m < 0$ 时, $h(s), h'(s)$ 随 s 的变化情况如表所示.

s	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, m)$	m	$(m, +\infty)$
$h'(s)$	—	0	+	0	—
$h(s)$	$\searrow$	极小值 $h(-2)$	$\nearrow$	极大值 $h(m)$	$\searrow$

因为极小值 $h(-2) = e^{-2}(-m-4) < 0$, 极大值 $h(m) = me^m < 0$,

且当 $s \rightarrow -\infty$ 时, $h(s) \rightarrow 0$, 当 $s \rightarrow +\infty$ 时, $h(s) \rightarrow -\infty$,

所以 $e^{-2}(-m-4) < n < me^m$.

当 $m = -2$ 时, $h'(s) = -e^s(s+2) \leq 0$, $h(s)$ 单调递减, 不符合题意.

当 $-4 < m < -2$ 时, $h(s), h'(s)$ 随 s 的变化情况如表所示.

s	$(-\infty, m)$	m	$(m, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
$h'(s)$	—	0	+	0	—
$h(s)$	$\searrow$	极小值 $h(m)$	$\nearrow$	极大值 $h(-2)$	$\searrow$

因为极大值 $h(-2) = e^{-2}(-m-4) < 0$, 极小值 $h(m) = me^m < 0$,

且当 $s \rightarrow -\infty$ 时, $h(s) \rightarrow 0$, 当 $s \rightarrow +\infty$ 时, $h(s) \rightarrow -\infty$,

所以 $me^m < n < e^{-2}(-m-4)$.

当 $m \leq -4$ 时, $h(s), h'(s)$ 随 s 的变化情况如表所示.

s	$(-\infty, m)$	m	$(m, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
$h'(s)$	—	0	+	0	—
$h(s)$	$\searrow$	极小值 $h(m)$	$\nearrow$	极大值 $h(-2)$	$\searrow$

因为极大值 $h(-2) = e^{-2}(-m-4) \geq 0$, 极小值 $h(m) = me^m < 0$,

且当 $s \rightarrow -\infty$ 时, $h(s) \rightarrow 0^-$, 当 $s \rightarrow +\infty$ 时, $h(s) \rightarrow -\infty$,

所以 $me^m < n < 0$.

综上所述,点 Q 的集合为 $\left\{ (x, y) \mid \begin{cases} -2 < x < 0, \\ e^{-2}(-x-4) < y < xe^x \end{cases} \right.$

或 $\left\{ \begin{cases} -4 < x < -2, \\ xe^x < y < e^{-2}(-x-4) \end{cases} \right.$ 或 $\left\{ \begin{cases} x \leq -4, \\ xe^x < y < 0 \end{cases} \right\}$. (17分)

解后反思 在求解“ k 切点”问题时,关键是利用其定义将切线问题转化成求解方程根的个数问题,再利用导数求得函数单调性,运用数形结合的思想即可得出结论.

易错警示 第(2)问点 Q 的集合会错误地写成

$$\left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x < -2, \\ xe^x < y < -\frac{x+4}{e^2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} -2 < x < 0, \\ -\frac{x+4}{e^2} < y < xe^x \end{cases} \right\}, \text{ 原因是忽略了所构造的 } h(s) \text{ 图象向左的变化趋势.}$$

B04

八省联考(山西、河南、陕西、内蒙古、四川、云南、宁夏、青海 2025 年 1 月适应性测试)

你有能力拿到的分数

1, 7, 9, 10, 12, 13, 15~17, 18(1)(2), 19(1)①, 合计 112 分.

上述分数是基础题和中档题的分数,是通过科学的训练能够拿到的分数,你拿到了吗?

必得分

1. C 由题意,可得 $A \cap B = \{0, 1\}$.

2. D 依题意, $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

3. C 由题意得 $|2-4i| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$.

4. B 因为 $a = (0, 1), b = (1, 0)$, 所以 $a - b = (-1, 1)$, 故 $a \cdot (a - b) = 0 \times (-1) + 1 \times 1 = 1$.

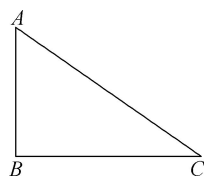
5. C **解法 1** 由方程 $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$, 得 $a = 1, b = 3$, 所以渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm 3x$.

解法 2 由 $x^2 - \frac{y^2}{9} = 0$, 得 $y^2 = 9x^2$, 所以其渐近线方程为 $y = \pm 3x$.

6. A 由题意可知,圆锥的底面半径 $R = 1$, 母线长 $l = 2$, 高 $h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, 所以圆锥的体积 $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

7. C **【启发式分析】** 由于所给出的三角形的条件是两条边及其中一边的对角, 因此可以应用正弦定理或余弦定理来求解.

解法 1(余弦定理法) 设 $AB = x$, 根据余弦定理得 $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \angle BAC$, 已知 $BC = 8, AC = 10$, $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$, 代入可得 $8^2 = 10^2 + x^2 - 2 \times 10 \times x \times \frac{3}{5}$, 即 $x^2 - 12x + 36 = 0$, 解得 $x = 6$. 由于 $BC^2 + AB^2 = 64 + 36 = 100 = AC^2$, 则 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$.



解法 2(正弦定理法) 因为 $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$, 所以 $\sin \angle BAC = \frac{4}{5}$.

由正弦定理 $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$, 得 $\sin B = \frac{AC \sin A}{BC} = \frac{10 \times \frac{4}{5}}{8} = 1$.

又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{2}$, 从而 $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$.

8. B **【启发式分析】** 去掉函数 $f(x)$ 中的绝对值, 转化为分段函数来分段处理.

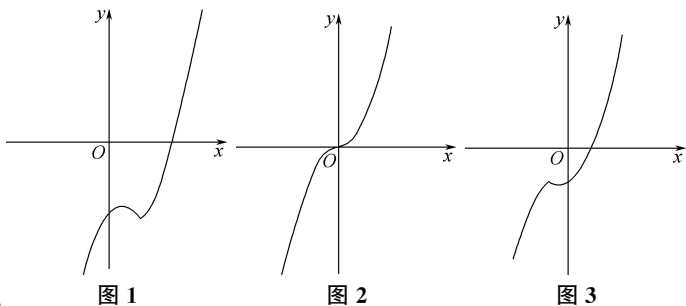
解法 1 (分类讨论法) 由题意知, $f(x) = x|x-a| - 2a^2 = \begin{cases} x^2 - ax - 2a^2, & x \geq a, \\ -x^2 + ax - 2a^2, & x < a. \end{cases}$ 因为当 $x < a$ 时, $f(x) = -x^2 + ax - 2a^2 = -(x - \frac{a}{2})^2 - \frac{7a^2}{4} < 0$, 所以 $a \leq 2$. 当 $x \geq a$ 时, $f(x) = (x - 2a)(x + a)$, 在 $(2, +\infty)$ 上, 有 $f(x) > 0$.

【启发式分析】 考虑此时的函数 $f(x)$ 的两个零点的大小关系.

①若 $2a > -a$, 即 $a > 0$, 则当 $x > 2a$ 时, $f(x) > 0$, 从而 $2 \geq 2a$, 此时有 $0 < a \leq 1$; ②若 $2a = -a$, 即 $a = 0$, 则 $f(x) = x^2 > 0$ 在 $(2, +\infty)$ 上成立; ③若 $2a < -a$, 即 $a < 0$, 则当 $x > -a$ 时, $f(x) > 0$, 从而 $2 \geq -a$, 此时有 $-2 \leq a < 0$. 综上, 实数 a 的取值范围是 $[-2, 1]$.

【启发式分析】 将函数 $f(x)$ 转化为分段函数, 借助于数形结合的方法来加以研究.

解法 2 (数形结合法) 由题意, 得 $f(x) = x|x-a| - 2a^2 = \begin{cases} x^2 - ax - 2a^2, & x \geq a, \\ -x^2 + ax - 2a^2, & x < a. \end{cases}$



当 $a > 0, a = 0, a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象分别为图 1、图 2、图 3, 且函数 $f(x)$ 的零点分别为 $2a, 0, -a$. 当 $a > 0$ 时, 要使得 $x > 2$ 时, $f(x) > 0$, 则 $2a \leq 2$, 即 $0 < a \leq 1$; 当 $a = 0$ 时, $x > 2$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立; 当 $a < 0$ 时, 要使得 $x > 2$ 时, $f(x) > 0$, 则 $-a \leq 2$, 即 $-2 \leq a < 0$. 综上, 实数 a 的取值范围是 $[-2, 1]$.

【启发式分析】 利用 $x > 2$ 时, $f(x) > 0$ 将不等式进行转化, 从而求解.

解法 3 (等价转换法) 由 $f(x) > 0$, 得 $|x-a| > \frac{2a^2}{x}$, 从而 $x-a > \frac{2a^2}{x}$ 或 $x-a < -\frac{2a^2}{x}$, 也即 $\frac{(x-2a)(x+a)}{x} > 0$ ① 或 $\frac{x^2 - ax + 2a^2}{x} < 0$ ②. 因为 $x > 2$, 所以不等式①和②分别等价于 $(x-2a)(x+a) > 0$ 和 $x^2 - ax + 2a^2 < 0$. 因为 $x^2 - ax + 2a^2 > 0$ 恒成立, 所以当 $x > 2$ 时, $f(x) > 0$ 等价于当 $x > 2$ 时, $(x-2a)(x+a) > 0$. 故①若 $2a > -a$, 即 $a > 0$, 则当 $x > 2a$ 时, $f(x) > 0$, 从而 $2 \geq 2a$, 此时有 $0 < a \leq 1$; ②若 $2a = -a$, 即 $a = 0$, 则 $f(x) = x^2 > 0$ 在 $(2, +\infty)$ 上成立; ③若 $2a < -a$, 即 $a < 0$, 则当 $x > -a$ 时, $f(x) > 0$, 从而 $2 \geq -a$, 此时有 $-2 \leq a < 0$. 综上, 实数 a 的取值范围是 $[-2, 1]$.

解后反思 本题所采用的三种解法中, 解法 1 与解法 2 是问题的常规解法. 相比而言, 解法 2 更为直观、简洁, 这是由于它有效地利用了函数图象的直观性; 解法 3 则是通过等价转换法, 将原不等式在 $x > 2$ 时, $f(x) > 0$ 等价转换为当 $x > 2$ 时, $(x-2a)(x+a) > 0$, 从而简化了问题的研究.

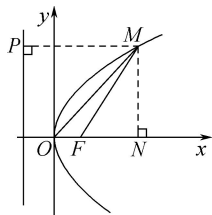
9. ABC 对于 A, 因为 $F(2, 0)$ 是抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的焦点, 所以 $\frac{p}{2} = 2$, 解得 $p = 4$, 故 A 正确; 对于 B, 设点 $M(x_0, y_0)$ 在 $y^2 =$

$8x$ 上, 所以 $x_0 \geq 0$, 所以 $|MF| = x_0 + \frac{p}{2} \geq \frac{p}{2} = |OF|$, 故 B 正确;

对于 C, 因为以点 M 为圆心且过点 F 的圆的半径长 $|MF| = x_0 + 2$ 为点 M 到抛物线 C 的准线的距离, 所以以 M 为圆心且过点 F 的圆与抛物线 C 的准线相切, 故 C 正确; 对于 D,

解法 1 当 $\angle OFM = 120^\circ$ 时, $x_0 > 2$, $\frac{y_0}{x_0 - 2} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$, 且 $y_0^2 = 8x_0$, $y_0 > 0$, 所以 $\sqrt{3}y_0^2 - 8y_0 - 16\sqrt{3} = 0$, 解得 $y_0 = 4\sqrt{3}$ 或 $y_0 = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (舍去), 所以 $\triangle OFM$ 的面积 $S_{\triangle OFM} = \frac{1}{2} |OF| \times |y_0| = 4\sqrt{3}$, 故 D 错误.

解法 2 因为 M 是抛物线上一点, 所以它到准线的距离等于 $|MF|$. 过点 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N , 过点 M 作准线的垂线, 垂足为 P , 则 $|MF| = |MP|$, 则 $|ON| = |OF| + |FN| = \frac{p}{2} + |FN| = \frac{p}{2} + |MF| \cos \angle MFN = \frac{p}{2} + \frac{1}{2} |MF| = |MP| - \frac{p}{2}$, 所以 $|MF| = 2p = 8$, 所以 $S_{\triangle OFM} = \frac{1}{2} \cdot |OF| \cdot |MF| \sin \angle OFM = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$, 故 D 错误.



10. ACD 对于 A, 令 $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 因为 $y = e^x, y = e^{-x}$ 分别是 $\mathbf{R}$ 上的增函数、减函数, 所以双曲正弦函数是增函数, 故 A 正确; 对于 B, 令 $g(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 则 $g'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 由 A 知, $g'(x)$ 为增函数, 又 $g'(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$, 故当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 B 错误; 对于 C, $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$, 由于 $y = e^{2x} + 1$

在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 且 $y = e^{2x} + 1 > 1$, 故 $\tanh x = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$ 是增函数, 故 C 正确; 对于 D, 由 C 知, $\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, 则 $\tanh(x+y) =$

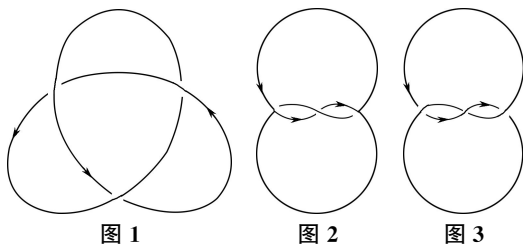
$$\begin{aligned} \frac{e^{2x+2y} - 1}{e^{2x+2y} + 1} &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} = \frac{\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} + \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}}{1 + \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \cdot \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}} \\ &= \frac{(e^{2x} - 1)(e^{2y} + 1) + (e^{2y} - 1)(e^{2x} + 1)}{(e^{2x} + 1)(e^{2y} + 1) + (e^{2x} - 1)(e^{2y} - 1)} \\ &= \frac{e^{2x+2y} + e^{2x} - e^{2y} - 1 + e^{2x+2y} - e^{2x} + e^{2y} - 1}{e^{2x+2y} + e^{2x} + e^{2y} + 1 + e^{2x+2y} - e^{2x} - e^{2y} - 1} = \frac{2e^{2x+2y} - 2}{2e^{2x+2y} + 2} = \frac{e^{2x+2y} - 1}{e^{2x+2y} + 1}, \end{aligned}$$

故 $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$, 故 D 正确.

11. ABD **【启发式分析】** 所谓无损伤地变为图中的绳结, 本质就是等价. 因此我们可以从两个方面来加以解决: 一是从实际操作的方式来解决问题, 二是沿绳结的某处剪开拉直看是否相同.

解法 1(实际操作法) 对于 A,原图中的圆环不可解开,则无法无损变为一个圆,所以无法得到 A 选项;对于 D,三个圆不是一根绳,所以无法得到 D 选项;对于 B,C,我们可以采用实际操作的方式来判断,通过实际操作可以判断出无法得到选项 B,但可以得到选项 C.

解法 2(等价转换法) 在原图中的绳结上任选一点剪开拉直,可得它为一个结,因此只需在选项中的四个绳结上任选一点,剪开拉直后来判断它是否为一个结.对于 A,任选一点剪开后拉直无结,故得不到 A.对于 D,任选一点剪开后拉直后不是一个结,故得不到 D.对于 B,C,任选一点剪开后拉直得到的是一个结,但 B,C 选项得到的结的“走向”不同,为此,进一步来判断原图的“走向”,原图中带箭头的绳先从绳的下方“穿过”,然后,它又从绳的上方“穿过”(如图 1 所示).选项 B 的绳是先从绳的上方“穿过”,然后,它又从绳的下方“穿过”,因此得不到 B(如图 2 所示);而选项 C 中的绳先从绳的下方“穿过”,然后,它又从绳的上方“穿过”(如图 3 所示),故可得到 C.



解后反思 本题来源于拓扑学中的纽结问题,很多智商测试中常见.但它并非要求我们去学习拓扑学的知识,它其实考查的是我们的数学素养以及解决问题的基本方法,比如如何为“无损伤地变为”的含义以及操作法.这也提醒我们,新高考的题目将不局限于纯数学内容,以后会涉及类似于脑筋急转弯、智力题、空间想象题,甚至常识题!

12. e 由 $f(\ln 2)f(\ln 4)=8$,可得 $a^{\ln 2} \cdot a^{\ln 4}=8$,即 $a^{\ln 2+\ln 4}=a^{3\ln 2}=8$,也即 $(a^{\ln 2})^3=2^3$.因为 $a>0$ 且 $a \neq 1$,所以 $a^{\ln 2}=2$,两边取对数得 $\ln 2 \cdot \ln a=\ln 2$,解得 $a=e$.

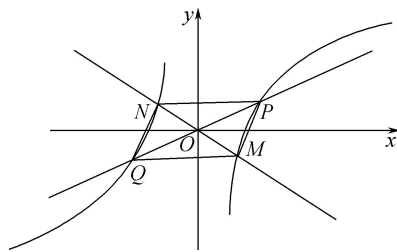
13. $\frac{3}{56}$ 【启发式分析】从这 8 张卡片中随机抽出的 3 张卡片上的数字之和与其余 5 张卡片上的数字之和相等,故抽出的 3 张卡片上的数字之和应为 18,因此用列举法列出和为 18 的 3 张卡片.

从 8 张卡片中随机抽出 3 张,则样本空间中总的样本点数为 $C_8^3=\frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2}=56$.因为 $1+2+3+4+5+6+7+8=36$,所以要使抽出的 3 张卡片上的数字之和与其余 5 张卡片上的数字之和相等,则抽出的 3 张卡片上的数字之和应为 18,则抽出的 3 张卡片上的数字的组合有 $(8,7,3), (8,6,4), (7,6,5)$,共 3 种,所以符合抽出的 3 张卡片上的数字之和为 18 的样本点共 3 个,所以抽出的 3 张卡片上的数字之和与其余 5 张卡片上的数字之和相等的概率为 $\frac{3}{56}$.

14. $2\sqrt{2}$ 【启发式分析】寻找 $\triangle OPM$ 与 $\triangle MNQ$ 之间的关系是解决问题的基本思路,为此,通过研究曲线 C 的性质来加以判断.

令 $f(x)=x^3-\frac{2}{x}, x \neq 0$,则 $f(-x)=-f(x)$,所以曲线 C 所对应的函数为奇函数.又当 $x>0$ 时,函数 $f(x)=x^3-\frac{2}{x}$ 单调递

增,故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上也单调递增,曲线 C 的大致图象如图所示.



因为直线 l_1, l_2 均过坐标原点 O,所以 M, N 两点关于原点对称, P, Q 两点关于原点对称,故四边形 PMQN 为平行四边形.因为 $S_{\triangle OPM}=\sqrt{2}$,所以 $S_{\triangle MNQ}=2\sqrt{2}$.

解后反思 充分利用曲线图象关于原点对称的性质,确定点的对称关系,这是解决本题的基础.通过对称关系,能够推导出相关线段和三角形之间的等量关系,为后续的面积计算提供依据.

15. 解: (1) 由列联表知, $s=100+80=180, t=80+70=150$. (3 分)

(2) 由列联表知,未服用药物 A 的动物有 $s=180$ (只),未服用药物 A 且患疾病 B 的动物有 80 只, (5 分)

所以未服用药物 A 的动物患疾病 B 的频率为 $\frac{80}{180}=\frac{4}{9}$,

所以未服用药物 A 的动物患疾病 B 的概率的估计值为 $P=$

$\frac{4}{9}$. (8 分)

(3) 零假设为 H_0 : 药物 A 对预防疾病 B 无效. (9 分)

$\chi^2=\frac{400(100 \times 70-150 \times 80)^2}{180 \times 220 \times 250 \times 150}=\frac{2\ 000}{297} \approx 6.734 > 6.635$,

(11 分)

根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,推断 H_0 不成立,

即认为药物 A 对预防疾病 B 有效,该推断犯错误的概率不超过 0.01,

所以根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,能认为药物 A 对预防疾病 B 有效. (13 分)

16. (1) 证明: 由 $a_{n+1}=\frac{3a_n}{a_n+2}$, 得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{3a_n}=\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{1}{3}$,

则 $1-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a_n}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)$. (3 分)

又 $\left\{1-\frac{1}{a_n}\right\}$ 的首项为 $1-\frac{1}{a_1}=\frac{2}{3} \neq 0$,

所以数列 $\left\{1-\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项, $\frac{2}{3}$ 为公比的等比数列.

(5 分)

(2) 解: 由 (1) 得, $1-\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$, 故 $a_n=\frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$. (8 分)

(3) 【启发式分析】注意到数列 $\{a_n\}$ 为分式形式,从而得数列 $\{b_n\}$ 也为分式形式.研究分式形式的问题常用的方法是常数分离法,以此将复杂的分式转化为简单的形式来加以研究.

证法 1(常数分离法) $b_n=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-2}$,

$$b_{n+1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} - 2}. \quad (11 \text{ 分})$$

因为 $0 < \frac{2}{3} < 1$, 所以 $-2 < 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} - 2 < 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 2$, 从而 $b_n < b_{n+1} < 1$. (15 分)

【启发式分析】根据所要证明的对象可知,问题本质就是判断数列 $\{b_n\}$ 的单调性,因此,应用比较法(作差或作商)来加以判断.

证法 2 因为 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{3^{n+1} - 2^{n+1}} \cdot \frac{3^n - 2^n}{3^n} = \frac{3(3^n - 2^n)}{3^{n+1} - 2^{n+1}}$, (10 分)

所以 $b_{n+1} - b_n = \frac{3(3^{n+1} - 2^{n+1})}{3^{n+2} - 2^{n+2}} - \frac{3(3^n - 2^n)}{3^{n+1} - 2^{n+1}} = \frac{3 \cdot 6^n}{(3^{n+2} - 2^{n+2})(3^{n+1} - 2^{n+1})}$. (12 分)

因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $3^{n+2} - 2^{n+2} > 0$, $3^{n+1} - 2^{n+1} > 0$, 故 $b_{n+1} - b_n > 0$, 即 $b_{n+1} > b_n$. (13 分)

又 $b_n = \frac{3(3^n - 2^n)}{3^{n+1} - 2^{n+1}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 2}$, 所以 $-2 < 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} - 2 < 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 2$, 故 $b_{n+1} < 1$, 从而 $b_n < b_{n+1} < 1$. (15 分)

规范书写 【1】没有说明 $1 - \frac{1}{a_1} = \frac{2}{3} \neq 0$, 扣 2 分.

易错警示 判断数列 $\{a_n\}$ 为等比数列的必要条件是 $a_1 \neq 0$, 不能忽略对 a_1 不为 0 的判断.

解后反思 求数列中项的取值范围,本质就是确定数列的单调性,而判断数列的单调性通常有两种方法:一是邻项比较法,即通过比较相邻两项的大小关系来得到它的单调性;二是函数法,即将它转化为函数,应用判断函数的单调性的方法来加以解决.

17. 解: (1) 当 $a=1, b=-2$ 时, $f(x) = \ln x - \frac{2}{x} - x$, 其中 $x > 0$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - 1 = \frac{x - x^2 + 2}{x^2}$.
由 $f'(x) = 2$, 即 $\frac{x - x^2 + 2}{x^2} = 2$, 得 $x = -\frac{2}{3}$ (舍去) 或 $x = 1$. (3 分)

又 $f(1) = -3$, 即切线过点 $(1, -3)$, 故切线方程为 $y + 3 = 2(x - 1)$, 即 $2x - y - 5 = 0$. (6 分)

(2) 因为 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} - 1 = \frac{-x^2 + ax - b}{x^2}$, 由 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 得 $f'(1) = -1 + a - b = 0$, 即 $a = b + 1$, 故 $f'(x) = \frac{-x^2 + (b+1)x - b}{x^2} = -\frac{(x-1)(x-b)}{x^2}$. (8 分)

【启发式分析】讨论导数 $f'(x)$ 的零点 1, b 是否在函数 $f(x)$ 的定义域内以及它们的大小关系, 来确定 b 的取值范围.

①若 $b \leq 0$, 由 $f'(x) > 0$, 得 $x \in (0, 1)$, 由 $f'(x) < 0$, 得 $x \in (1, +\infty)$, 故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 此时 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 不满足题意; (10 分)

②若 $0 < b < 1$, 由 $f'(x) > 0$, 得 $x \in (b, 1)$, 由 $f'(x) < 0$, 得 $x \in (0, b) \cup (1, +\infty)$, 则 $f(x)$ 在 $(b, 1)$ 上单调递增, 在 $(0, b)$, $(1, +\infty)$ 上单调递减, 此时 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 不满足题意; (12 分)

③若 $b=1$, 则 $f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{x^2} \leq 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 无极值, 不满足题意; (13 分)

④若 $b > 1$, 由 $f'(x) > 0$, 得 $x \in (1, b)$, 由 $f'(x) < 0$, 得 $x \in (0, 1) \cup (b, +\infty)$, 则 $f(x)$ 在 $(1, b)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$, $(b, +\infty)$ 上单调递减, 此时 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 满足题意.

综上, $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点时, $b > 1$. (15 分)

规范书写 【1】没有写函数 $f(x)$ 的定义域扣 1 分.

【2】函数 $f(x)$ 在 $(0, b)$, $(1, +\infty)$ 上单调递减, 若写成“在 $(0, b) \cup (1, +\infty)$ 上单调递减”, 扣 1 分.

18. (1) 解: 根据题意, 设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

因为椭圆的左、右焦点分别为 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, 所以 $c = 1$. (1 分)

又因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 所以 $a = 2$, 从而得 $b^2 = 3$, 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. (3 分)

(2) 证明: 由 $M_0(1, 4)$, $F_1(-1, 0)$ 得直线 M_0F_1 的斜率 $k = 2$, F_1M_0 的中点坐标为 $(0, 2)$, 所以线段 F_1M_0 的垂直平分线方程为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$. (5 分)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = -\frac{1}{2}x + 2, \end{cases} \text{ 得 } x^2 - 2x + 1 = 0, \text{ 解得 } x = 1, \text{ 从而 } y = \frac{3}{2}.$$

(7 分)

故线段 F_1M_0 的垂直平分线与 C 恰有一个公共点 $(1, \frac{3}{2})$. (8 分)

(3) **【启发式分析】**通过设出点 M 的坐标, 得到线段 F_1M 的垂直平分线方程, 利用线段 F_1M 的垂直平分线与椭圆只有一个公共点来求得点 M 的轨迹方程.

证法 1 (设点法) 设 $M(x_0, y_0)$, 当 $y_0 = 0$ 时, 线段 F_1M 的垂直平分线方程为 $x = \frac{x_0 - 1}{2}$, 此时 $\frac{x_0 - 1}{2} = \pm 2$, $x_0 = 5$ 或 $x_0 = -3$. (9 分)

当 $y_0 \neq 0$ 时, F_1M 的垂直平分线方程为 $y = -\frac{x_0 + 1}{y_0}(x - \frac{x_0 - 1}{2}) + \frac{y_0}{2} = -\frac{x_0 + 1}{y_0}x + \frac{x_0^2 + y_0^2 - 1}{2y_0}$. (10 分)

$$\begin{cases} y = -\frac{x_0 + 1}{y_0}x + \frac{x_0^2 + y_0^2 - 1}{2y_0}, \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 得}$$

$$3x^2 + 4 \left[\frac{(x_0 + 1)^2}{y_0^2} x^2 - \frac{(x_0 + 1)(x_0^2 + y_0^2 - 1)}{y_0^2} x + \frac{(x_0^2 + y_0^2 - 1)^2}{4y_0^2} \right] = 12,$$

$$\text{即 } \left[3 + \frac{4(x_0 + 1)^2}{y_0^2} \right] x^2 - \frac{4(x_0 + 1)(x_0^2 + y_0^2 - 1)}{y_0^2} x + \frac{(x_0^2 + y_0^2 - 1)^2}{y_0^2} - 12 = 0.$$

(12 分)

因为线段 F_1M 的垂直平分线与 C 恰有一个公共点,

所以 $\Delta = \frac{16(x_0 + 1)^2(x_0^2 + y_0^2 - 1)^2}{y_0^4} - 4 \left[3 + \frac{4(x_0 + 1)^2}{y_0^2} \right] = 0$.

$$\left[\frac{(x_0^2 + y_0^2 - 1)^2}{y_0^2} - 12 \right] = 0,$$

$$\text{即 } y_0^4 + (2x_0^2 - 14)y_0^2 + x_0^4 - 18x_0^2 - 32x_0 - 15 = 0,$$

$$\text{即 } (y_0^2 + x_0^2 + 2x_0 + 1)(y_0^2 + x_0^2 - 2x_0 - 15) = 0. \quad (15 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 + 1 = (x_0 + 1)^2 + y_0^2 > 0, \text{ 所以 } x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 15 = 0,$$

而 $(5, 0), (-3, 0)$ 也满足该式,

$$\text{故点 } M \text{ 的轨迹是圆, 该圆的方程为 } x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0, \text{ 即 } (x-1)^2 + y^2 = 16. \quad (17 \text{ 分})$$

【启发式分析】注意到证法 1 中直接设点 M 的坐标来求它的轨迹方程时, 线段 F_1M 的垂直平分线方程比较复杂, 因此直接设线段 F_1M 的垂直平分线方程来处理问题.

证法 2 (设线法) 当直线 F_1M 的斜率不为 0 时, 设线段 F_1M 的垂直平分线 l 的方程为 $y = kx + m$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 得 } (4k^2 + 3)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0,$$

$$\text{由 } \Delta = 64k^2m^2 - 4(4k^2 + 3)(4m^2 - 12) = 0 \text{ 得 } m^2 = 3 + 4k^2. \quad (10 \text{ 分})$$

【启发式分析】注意到直线 l 与 F_1M 的交点 E 为线段 F_1M 的中点, 因此求点 M 的轨迹方程本质只需求得点 E 的轨迹方程, 而点 E 为直线 l 与直线 F_1M 的交点, 因此, 利用 $m^2 = 3 + 4k^2$ 来消去它们中的参数 k, m , 从而求得点 E 的轨迹方程.

$$\text{由题意知, } F_1M: y = -\frac{1}{k}(x+1), \text{ 即 } x + ky = -1 \quad \textcircled{1},$$

$$\text{而 } l: y = kx + m, \text{ 即 } kx - y = -m \quad \textcircled{2}.$$

设直线 l 与 F_1M 的交点为 E .

【启发式分析】如何根据 $m^2 = 3 + 4k^2$ 来得到点 E 的轨迹方程? 一方面, 将 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 联立后, 则 (x, y) 即为交点 E ; 另一方面, 注意到 $m^2 = 3 + 4k^2$ 中的 m, k 为平方关系, 因此将 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 进行平方来处理.

$$\text{将 } \textcircled{1} \text{ 式与 } \textcircled{2} \text{ 式分别平方相加得 } (k^2 + 1)(x^2 + y^2) = m^2 + 1,$$

$$\text{而由 } m^2 = 3 + 4k^2 \text{ 得 } m^2 + 1 = 4(k^2 + 1), \text{ 从而 } x^2 + y^2 = 4, \text{ 即为点 } E \text{ 的轨迹方程.} \quad (12 \text{ 分})$$

$$\left(\text{此处也可用如下解法: 由 } \begin{cases} y = -\frac{1}{k}(x+1), \\ y = kx + m \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = -\frac{mk+1}{k^2+1}, \\ y = \frac{m-k}{k^2+1}. \end{cases} \right)$$

$$\text{故 } x^2 + y^2 = \frac{m^2k^2 + 1 + m^2 + k^2}{(k^2 + 1)^2} = 4. \quad \text{)$$

$$\text{设 } M(x, y), \text{ 则 } E\left(\frac{x-1}{2}, \frac{y}{2}\right), \text{ 可得 } (x-1)^2 + y^2 = 16. \quad (14 \text{ 分})$$

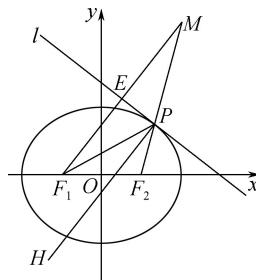
$$\text{当直线 } l \text{ 与椭圆的交点在 } x \text{ 轴上时, } M(5, 0) \text{ 或 } M(-3, 0) \text{ 满足 } (x-1)^2 + y^2 = 16; \quad (15 \text{ 分})$$

$$\text{当直线 } l \text{ 与椭圆的交点在 } y \text{ 轴上时, } M(-1, \pm 2\sqrt{3}) \text{ 满足 } (x-1)^2 + y^2 = 16. \quad (16 \text{ 分})$$

$$\text{因此, 点 } M \text{ 的轨迹是以点 } (1, 0) \text{ 为圆心, } 4 \text{ 为半径的圆, 它的轨迹方程为 } (x-1)^2 + y^2 = 16. \quad (17 \text{ 分})$$

【启发式分析】注意到线段 F_1M 的垂直平分线与椭圆的交点 P 为垂直平分线上的点, 因此利用垂直平分线的性质, 有 $|MP| = |F_1P|$. 又由 P 为椭圆上的点, 联想到 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 4$, 由此来确定点 M 所满足的条件.

证法 3 (几何法) 设线段 F_1M 的垂直平分线 l 与 C 恰有一个公共点 P , 则当点 P 不在长轴上时, 线段 F_1M 的垂直平分线 l 即为椭圆在点 P 处的切线, 也为 $\angle F_1PM$ 的平分线.



作 $\angle F_1PF_2$ 的平分线 PH , 根据椭圆的光学性质得 $PH \perp l$, 所以 $\angle F_1PE + \angle F_1PH = 90^\circ$,

$$\text{则 } \angle F_2PH + \angle EPM = 90^\circ, \text{ 故 } \angle F_2PF_1 + \angle F_1PM = 180^\circ, \text{ 所以 } M, P, F_2 \text{ 三点共线,} \quad (12 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } |MF_2| = |MP| + |PF_2| = |PF_1| + |PF_2| = 4,$$

$$\text{所以点 } M \text{ 的轨迹是以点 } F_2 \text{ 为圆心, } 4 \text{ 为半径的圆.} \quad (15 \text{ 分})$$

$$\text{当点 } P \text{ 在椭圆长轴上时, 点 } M \text{ 为 } (5, 0) \text{ 或 } (-3, 0), \text{ 也满足 } |MF_2| = 4. \quad (16 \text{ 分})$$

$$\text{故点 } M \text{ 的轨迹是圆, 该圆的方程为 } (x-1)^2 + y^2 = 16. \quad (17 \text{ 分})$$

解后反思 1. 判断直线与椭圆公共点的个数问题的方法及步骤:

(1) 首先根据题意得到直线和椭圆方程;

(2) 联立直线和椭圆方程, 消元得到一元二次方程;

(3) 计算 Δ , 根据 $\Delta > 0, \Delta < 0, \Delta = 0$, 判断直线与椭圆公共点的个数.

2. 对于第(3)问中的三种证法, 其中证法 1 是最为基础的方法, 它是直接利用条件来寻找点 M 的轨迹方程, 可以看出, 这种解法的运算量比较大, 对计算的要求很高; 证法 2 则是采用设线法, 通过分步求解的手段, 即先求点 E 的轨迹方程, 然后求与之相关的点 M 的轨迹方程, 降低了运算的难度, 是一种不错的解题策略; 证法 3 则是从图形的几何特征出发, 充分挖掘题目中的几何要素来解题, 可以发现, 几乎没有运算量, 但对思维能力的要求较高.

19. (1) ① 证明: 如图 1, 在 $\triangle ACD$ 中, 由 $AC = CD = 1$, $\angle ADC = 30^\circ$ 得 $\angle CAD = \angle ADC = 30^\circ$,

$$\text{所以 } \angle BAC = \angle DAB - \angle CAD = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ, \text{ 即 } AB \perp AC. \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{又 } PC \perp AB, PC \cap AC = C, PC, AC \subset \text{平面 } PAC, \text{ 所以 } AB \perp \text{平面 } PAC. \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{又 } AB \subset \text{平面 } ABC, \text{ 所以平面 } PAC \perp \text{平面 } ABC. \quad (4 \text{ 分})$$

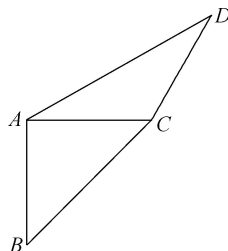


图 1

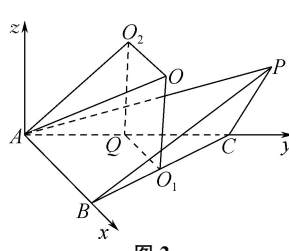


图 2

② 解法 1 (确定球心法) **【启发式分析】**利用三棱锥 $P-ABC$ 相邻两个平面的截面圆来确定球心 O 的位置, 注意到 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 因此它的截面圆的圆心为 BC 的中点 O_1 . 由于 $AB \perp \text{平面 } PAC$, 为此, 再确定平面 PAC 的截面圆的圆心 O_2 , 分别过点 O_1, O_2 作它们所在截面圆的垂线, 则交点为球心 O .

如图2,由题意知,球 O 经过 $\triangle ABC$ 的截面圆,圆心 O_1 是 BC 的中点,

$$\text{圆 } O_1 \text{ 的半径 } OC_1 = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (5 \text{ 分})$$

设球 O 经过 $\triangle PAC$ 的截面圆,圆心为 O_2 ,由正弦定理,得圆

$$O_2 \text{ 的半径 } O_2A = \frac{AC}{2\sin 30^\circ} = \frac{1}{1} = 1. \quad (6 \text{ 分})$$

设圆 O_1 与圆 O_2 的公共弦 AC 的中点为 Q .

由①知, $QO_1 \perp$ 截面圆 O_2 ,由球的截面性质知,四边形 OO_1QO_2 为矩形,

$$\text{所以 } O_2O = QO_1 = \frac{1}{2}, \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{所以球 } O \text{ 的半径 } OA = \sqrt{O_2A^2 + O_2O^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \quad (9 \text{ 分})$$

解法2 【启发式分析】注意到 $AB \perp$ 平面 PAC ,因此,利用侧棱垂直于底面的模型来进行处理.

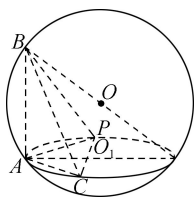


图3

如图3,设 $\triangle PAC$ 的外接圆半径为 r ,球的半径为 R ,则根据正弦定理,得 $r = \frac{AC}{2\sin 30^\circ} = 1$. (6分)

因为 $AB \perp$ 平面 PAC ,所以 $2R = \sqrt{AB^2 + (2r)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$,

$$\text{即 } R = \frac{\sqrt{5}}{2}. \quad (9 \text{ 分})$$

解法3 【启发式分析】建立空间直角坐标系,利用球心到三棱锥 $P-ABC$ 四个顶点的距离等于半径来求解.

以 A 为原点, AB,AC 所在直线分别为 x 轴和 y 轴,建立如图2所示的空间直角坐标系 $A-xyz$,

$$\text{则 } A(0,0,0), B(1,0,0), C(0,1,0), P\left(0, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad (6 \text{ 分})$$

设球心为 $O(a,b,c)$,半径为 R ,则 $AO=BO=CO=PO=R$,

$$\text{所以 } a^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (b-1)^2 + c^2 =$$

$$a^2 + \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = R^2,$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{\sqrt{3}}{2}, R = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ 所以球 } O \text{ 的半径为 } \frac{\sqrt{5}}{2}. \quad (9 \text{ 分})$$

(2)解法1 【启发式分析】注意到 $AC \perp AB$,当 $\triangle ACD$ 沿 AC 翻折时,这种垂直关系一直保持不变,因此,将 $\triangle ACD(\triangle ACP)$ 放在某个平面内保持不动,而让 $\triangle ABC$ 沿着 AC 翻折来建立空间直角坐标系.

以 A 为坐标原点, AC 所在直线为 x 轴, $\triangle ACP$ 在平面 xAy 内,建立空间直角坐标系,如图4所示,

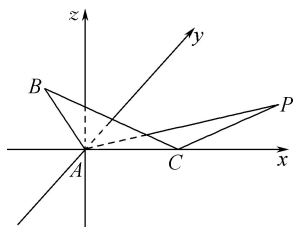


图4

则 $C(1,0,0), P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $AB=1$, 且 $AB \perp x$ 轴, 故设

$$B(0, \cos \theta, \sin \theta),$$

$$\text{故 } \vec{CP} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \vec{CB} = (-1, \cos \theta, \sin \theta),$$

$$\text{则平面 } ACP \text{ 的一个法向量为 } \mathbf{n}_1 = (0, 0, 1). \quad (11 \text{ 分})$$

设平面 BCP 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \vec{CB} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \vec{CP} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0, \\ -x + y\cos \theta + z\sin \theta = 0, \end{cases} \text{ 取 } y = \sin \theta, \text{ 则}$$

$$x = -\sqrt{3}\sin \theta, z = -\sqrt{3} - \cos \theta,$$

$$\text{即 } \mathbf{n}_2 = (-\sqrt{3}\sin \theta, \sin \theta, -\sqrt{3} - \cos \theta). \quad (13 \text{ 分})$$

设平面 ACP 与平面 BCP 的夹角为 φ ,则 $\cos \varphi = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} =$

$$\frac{|\sqrt{3} + \cos \theta|}{\sqrt{7 - 3\cos^2 \theta + 2\sqrt{3}\cos \theta}}. \quad (14 \text{ 分})$$

$$\text{令 } t = \sqrt{3} + \cos \theta \in [\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} + 1],$$

$$\text{则 } \cos \varphi = \frac{|t|}{\sqrt{-3t^2 + 8\sqrt{3}t - 8}} = \frac{1}{\sqrt{-8\left(\frac{1}{t} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3}}.$$

$$\text{令 } m = \frac{1}{t} \in \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right], \text{ 所以当 } m = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 即 } \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

时, $\cos \varphi$ 取得最小值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

易知二面角 $A-CP-B$ 是锐二面角,因此,当 $B\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 时,二面角 $A-CP-B$ 的余弦值最小,最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (17分)

解法2 【启发式分析】注意到 $AC \perp AB$,当 $\triangle ACD$ 沿 AC 翻折时,这种垂直关系一直保持不变,为此,将 $\triangle ABC$ 放在某个平面内保持不动,而让 $\triangle ACP$ 沿着 AC 翻折来建立空间直角坐标系.

以 A 为坐标原点, $\vec{AB}$ 的方向为 x 轴正方向,建立如图2所示的空间直角坐标系 $A-xyz$,^[3]则 $B(1,0,0), C(0,1,0), \vec{CA} = (0, -1, 0), \vec{CB} = (1, -1, 0)$. 设 $P(p, q, r)$,则 $\vec{CP} = (p, q-1, r)$.

$$(11 \text{ 分})$$

$$\text{由 } |\vec{CP}| = 1, \text{ 得 } p^2 + (q-1)^2 + r^2 = 1, \text{ 由题设知, } \cos \langle \vec{CA}, \vec{CP} \rangle = \cos 120^\circ, \text{ 可得 } q = \frac{3}{2}, \text{ 于是 } p^2 + r^2 = \frac{3}{4}. \text{ 故 } \vec{CP} = \left(p, \frac{1}{2}, r\right). \quad (12 \text{ 分})$$

设平面 ACP 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \vec{CP} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \vec{CA} = 0, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} px_1 + \frac{1}{2}y_1 + rz_1 = 0, \\ -y_1 = 0, \end{cases} \text{ 可取 } \mathbf{m} = (r, 0, -p). \quad (13 \text{ 分})$$

设平面 BCP 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{CP} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{CB} = 0, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} px_2 + \frac{1}{2}y_2 + rz_2 = 0, \\ x_2 - y_2 = 0, \end{cases} \text{ 可取 } \mathbf{n} = \left(r, r, -p - \frac{1}{2}\right). \quad (14 \text{ 分})$$

因为 $p^2 + r^2 = \frac{3}{4}$,所以 $|\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{3+2p}{\sqrt{3}\sqrt{7-4p^2+4p}}$. 设