



省时高效得高分

真题 分类卷

数学

- ★以5年真题为主，按模块分类查漏补缺，熟悉命题规律。
- ★以基础题和中档题为主，适合在高二升高三暑假使用，也可在一轮期间弥补短板。

Contents
目录

专题 1	集合、常用逻辑用语与不等式	1
专题 2	函数的概念、图象与性质	3
专题 3	幂指对函数及函数的综合应用	5
专题 4	导数及其应用	7
专题 5	三角函数与三角变换	9
专题 6	解三角形及其应用	11
专题 7	平面向量与复数	13
专题 8	等差、等比数列及其综合问题	15
专题 9	空间向量与立体几何	17
专题 10	直线与圆	19
专题 11	圆锥曲线与方程	21
专题 12	计数原理、概率及其分布、统计与统计案例	23
答案与解析		26

专题1 集合、常用逻辑用语与不等式

答案见 P26

一、选择题:本题共6小题,每小题5分,共30分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. (2024 新高考卷 I, 1) 已知集合 $A = \{x | -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $\{-1, 0\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-3, -1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$
2. (2024 全国甲卷理科, 2) 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x | \sqrt{x} \in A\}$, 则 $\complement_A(A \cap B) =$ ()
 A. $\{1, 4, 9\}$ B. $\{3, 4, 9\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{2, 3, 5\}$
3. (2024 新高考卷 II, 2) 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, |x+1| > 1$; 命题 $q: \exists x > 0, x^3 = x$, 则 ()
 A. p 和 q 都是真命题 B. $\neg p$ 和 q 都是真命题
 C. p 和 $\neg q$ 都是真命题 D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题
4. (2024 全国甲卷理科, 9) 已知向量 $a = (x+1, x)$, $b = (x, 2)$, 则 ()
 A. “ $x = -3$ ”是“ $a \perp b$ ”的必要条件 B. “ $x = -3$ ”是“ $a \parallel b$ ”的必要条件
 C. “ $x = 0$ ”是“ $a \perp b$ ”的充分条件 D. “ $x = -1 + \sqrt{3}$ ”是“ $a \parallel b$ ”的充分条件
5. (2023 新高考卷 I, 7) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 设甲: $\{a_n\}$ 为等差数列, 乙: $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 则 ()
 A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件 B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
 C. 甲是乙的充要条件 D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件
6. (2021 全国乙卷文, 8) 下列函数中最小值为4的是 ()
 A. $y = x^2 + 2x + 4$ B. $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$ C. $y = 2^x + 2^{2-x}$ D. $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$

二、选择题:本题共2小题,每小题6分,共12分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

7. (2022 全国甲卷理, 3 改编) 设全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $A = \{-1, 2\}$, $B = \{x | x^2 - 4x + 3 = 0\}$, 记 $M = \complement_U(A \cup B)$, 下列说法正确的是 ()
 A. $-2 \in M$ B. $-1 \in M$ C. $0 \in M$ D. $3 \in M$
8. (2020 新高考卷 I, 11) 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则 ()
 A. $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ B. $2^{a-b} > \frac{1}{2}$ C. $\log_2 a + \log_2 b \geq -2$ D. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

9. 若“ $x = \alpha$ ”是“ $\sin x + \cos x > 1$ ”的一个充分条件, 则 α 的一个可能值是_____.
10. 已知不等式 $ax^2 - x + 6 > 0$ 的解集为 $\{x | -3 < x < 2\}$, 则不等式 $x^2 + ax - 6 < 0$ 的解集为_____.
11. 已知 $1 < a < 4$, 则 $\frac{a}{4-a} + \frac{1}{a-1}$ 的最小值是_____.

四、解答题:本题共3小题,共43分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

12. (本小题满分13分)

设集合 $A = \left\{x \mid \frac{2x-4}{x-5} \leq 1\right\}$, $B = \{x | x^2 - 2mx + m^2 - 1 \leq 0\}$, $C = \{x | x^2 - ax - a + 1 \geq 0\}$.

- (1) 若 $A \cup B = A$, 求实数 m 的取值范围;
- (2) 若 $A \cap C = A$, 求实数 a 的取值范围.

13. (本小题满分 15 分)

设 $y = ax^2 + (1-a)x + a - 2$.

- (1) 若 $a = -2$, 求 $y = ax^2 + (1-a)x + a - 2 \leq 0$ 的解集;
- (2) 若不等式 $y \geq -2$ 对一切实数 x 恒成立, 求实数 a 的取值范围;
- (3) 解关于 x 的不等式: $ax^2 + (1-a)x + a - 2 < a - 1 (a \in \mathbf{R})$.

14. (本小题满分 15 分)

某校地势较低, 一遇到雨水天气校园内会有大量积水, 不但不方便师生出行, 还存在严重的安全问题. 为此学校决定利用原水池改建一个深 3 米、底面面积 16 平方米的长方体蓄水池. 不但能解决积水问题, 同时还可以利用蓄水灌溉学校植被. 改建及蓄水池盖儿固定费用 800 元, 由招标公司承担. 现对水池内部地面及四周墙面铺设公开招标. 甲工程队给出的报价如下: 四周墙面每平方米 150 元, 地面每平方米 400 元. 设泳池宽为 x 米 ($2 \leq x \leq 6$).

- (1) 当宽为多少时, 甲工程队报价最低? 请求出最低报价.
- (2) 现有乙工程队也要参与竞标, 其给出的整体报价为 $\frac{900a(x+2)}{x}$ 元 ($a > 0$) (整体报价中含固定费用). 若无论宽为多少米, 乙工程队都能竞标成功, 试求 a 的取值范围.

专题2 函数的概念、图象与性质

答案见 P27

一、选择题:本题共6小题,每小题5分,共30分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. (2021 全国甲卷文,4)下列函数为增函数的是 ()

A. $f(x) = -x$

B. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

C. $f(x) = x^2$

D. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

2. (2021 全国乙卷理,4)设函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则下列函数为奇函数的是 ()

A. $f(x-1)-1$

B. $f(x-1)+1$

C. $f(x+1)-1$

D. $f(x+1)+1$

3. (2023 新高考卷 I, 4) 设函数 $f(x) = 2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -2]$

B. $[-2, 0)$

C. $(0, 2]$

D. $[2, +\infty)$

4. (2023 全国乙卷理,4) 已知 $f(x) = \frac{xe^x}{e^{ax}-1}$ 为偶函数, 则 $a =$ ()

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

5. (2024 新高考卷 I, 6) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - a, & x < 0, \\ e^x + \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 0]$

B. $[-1, 0]$

C. $[-1, 1]$

D. $[0, +\infty)$

6. (2024 新高考卷 II, 6) 设函数 $f(x) = a(x+1)^2 - 1$, $g(x) = \cos x + 2ax$. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 恰有一个交点, 则 $a =$ ()

A. -1

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

二、选择题:本题共2小题,每小题6分,共12分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

7. (2020 全国卷 II 理,9 改编) 设函数 $f(x) = \ln|2x+1| - \ln|2x-1|$, 则 $f(x)$ ()

A. 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增

B. 在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增

C. 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增

D. 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减

8. (2023 新高考卷 I, 11) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$, 则 ()

A. $f(0) = 0$

B. $f(1) = 0$

C. $f(x)$ 是偶函数

D. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

9. (2023 全国甲卷理,13) 若 $y = (x-1)^2 + ax + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.

10. (2022 全国乙卷文,16) 若 $f(x) = \ln\left|a + \frac{1}{1-x}\right| + b$ 是奇函数, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

11. (2021 新高考卷 I, 13) 已知函数 $f(x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 是偶函数, 则 $a =$ _____.

四、解答题:本题共 3 小题,共 43 分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

12. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \frac{2^x + a}{2^x + 1} (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 当 $a < 1$ 时,利用单调性定义证明 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;
- (2) 若存在 $x_1 < 0 < x_2$,使 $f(x_1) + f(x_2) = 1$,求实数 a 的取值范围.

13. (本小题满分 15 分)

已知 $f(x), g(x)$ 分别是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数和奇函数,且 $f(x) + g(x) = e^x$.

- (1) 求函数 $f(x), g(x)$ 的解析式;
- (2) 设 $a > 0$,若关于 x 的不等式 $2f(x) - a[g(x)]^2 \geq 0$ 在区间 $(0, \ln 3)$ 上恒成立,求实数 a 的取值范围.

14. (本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x) = \log_2(4^x + 1) + kx$ 为偶函数.

- (1) 求实数 k 的值;
- (2) 解关于 m 的不等式: $f(2m+1) > f(m-1)$;
- (3) 设 $g(x) = \log_2(a \cdot 2^x + a) (a \neq 0)$,若函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 有 2 个零点,求实数 a 的取值范围.

答案与解析

专题1 集合、常用逻辑用语与不等式

1. A 由题意, $A = \{x \mid -\sqrt[3]{5} < x < \sqrt[3]{5}\}$, 则 $A \cap B = \{-1, 0\}$.

2. D 因为 $B = \{x \mid \sqrt{x} \in A\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 81\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 4, 9\}$, 故 $\complement_A(A \cap B) = \{2, 3, 5\}$.

3. B 对于命题 p , 取 $x = -1$, 则有 $|x+1| = 0 < 1$, 故 p 是假命题, $\neg p$ 是真命题; 对于命题 q , 取 $x = 1$, 则有 $x^3 = x = 1$, 故 q 是真命题, $\neg q$ 是假命题. 综上, $\neg p$ 和 q 都是真命题.

4. C $a \perp b$ 的充分条件是 $a \cdot b = 0$, 即 $x \cdot (x+1) + 2x = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $x = -3$, 故 A 错误, C 正确; $a \parallel b$ 的充要条件为 $2(x+1) = x^2$, 解得 $x = 1 \pm \sqrt{3}$, 故 B, D 错误.

5. C 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设公差为 d , 则 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$, $\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{n-1}{2}d$, 则 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{d}{2}$, 故甲是乙的充分条件. 若 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 设公差为 d' , 则 $\frac{S_n}{n} = S_1 + (n-1)d'$, 则 $S_n = nS_1 + n(n-1)d'$, 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = (n-1)S_1 + (n-1)(n-2)d'$, 两式相减得 $a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2d'$, 上式对 $n=1$ 也成立, 故 $a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2d'$, $n \in \mathbf{N}^*$, 则 $a_{n+1} - a_n = 2d'$, 所以 $\{a_n\}$ 为等差数列, 故甲是乙的必要条件, 所以甲是乙的充要条件.

解后反思 判断数列 $\{a_n\}$ 是等差数列的常用方法有以下四种: ①定义法: 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+1} - a_n$ 是同一常数. ②等差中项法: 对任意 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$, 满足 $2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$. ③通项公式法: 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 满足 $a_n = pn + q$ (p, q 为常数). ④前 n 项和公式法: 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 满足 $S_n = An^2 + Bn$ (A, B 为常数). 其中③④两种方法, 适用于小题, 在求解中, 较为快捷. 本题中, 在判定必要条件时, $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 可以直接设为 $\frac{S_n}{n} = kn + b$, 则 $S_n = kn^2 + bn$, 就可以得到 $\{a_n\}$ 为等差数列, 避免了烦琐的计算.

6. C 函数 $y = x + \frac{4}{x}$ 在 $(-\infty, -2), (2, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-2, 0), (0, 2)$ 上单调递减. 对于 A, $y = (x+1)^2 + 3 \geq 3$, 即最小值为 3, 故 A 不符合; 对于 B, $0 < |\sin x| \leq 1$, 当 $|\sin x| = 1$ 时, $y_{\min} = 5$, 故 B 不符合; 对于 C, $y = 2^x + \frac{4}{2^x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot \frac{4}{2^x}} = 4$, 当且仅当 $2^x = \frac{4}{2^x}$, 即 $x = 1$ 时, 取等号, 即最小值为 4, 故 C 符合; 对于 D, $\ln x \in \mathbf{R}, \ln x \neq 0$, 故该函数无最小值, 故 D 不符合.

7. AC 由 $B = \{1, 3\}$ 得 $A \cup B = \{-1, 1, 2, 3\}$, 从而 $M = \complement_U(A \cup B) = \{-2, 0\}$.

8. ABD 因为 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 所以 $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 = 1$, 所以 $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$, 故 A 正确; $2^{a-b} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{a-b} > 2^{-1}$, 即 $a > b - 1$, 显然成立, 故 B 正确; $\log_2 a + \log_2 b \geq -2$, 即 $ab \geq$

$\frac{1}{4}$, 又 $a+b=1 \geq 2\sqrt{ab}$, 所以 $ab \leq \frac{1}{4}$, 故 C 错误; 因为 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab} \leq 2(a+b) = 2$, 所以 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$, 故 D 正确.

9. $\frac{\pi}{4}$ (只需满足 $\alpha \in (2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}) (k \in \mathbf{Z})$ 即可) 由 $\sin x + \cos x > 1$, 可得 $\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) > 1$, 则 $\sin(x + \frac{\pi}{4}) > \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $2k\pi + \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < 2k\pi + \frac{3\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$. 因为“ $x = \alpha$ ”是“ $\sin x + \cos x > 1$ ”的一个充分条件, 所以 α 的一个可能取值为 $\frac{\pi}{4}$ (只需满足 $\alpha \in (2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}) (k \in \mathbf{Z})$ 即可).

10. $(-2, 3)$ 因为不等式 $ax^2 - x + 6 > 0$ 的解集为 $\{x \mid -3 < x < 2\}$, 所以 $a < 0$ 且方程 $ax^2 - x + 6 = 0$ 的解为 $-3, 2$, 则 $\frac{1}{a} = -1$, 所以 $a = -1$, 则不等式 $x^2 + ax - 6 < 0$ 即为不等式 $x^2 - x - 6 < 0$, 解得 $-2 < x < 3$, 即不等式 $x^2 + ax - 6 < 0$ 的解集为 $(-2, 3)$.

11. 2 解法 1 (分离常数+常数代换) 因为 $1 < a < 4$, 所以 $4-a > 0, a-1 > 0$, 所以 $\frac{a}{4-a} + \frac{1}{a-1} = \frac{4}{4-a} + \frac{1}{a-1} - 1 = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{4-a} + \frac{1}{a-1} \right) (4-a+a-1) - 1 = \frac{1}{3} \left[5 + \frac{4(a-1)}{4-a} + \frac{4-a}{a-1} \right] - 1 \geq \frac{1}{3} \left[5 + 2\sqrt{\frac{4(a-1)}{4-a} \cdot \frac{4-a}{a-1}} \right] - 1 = 2$, 当且仅当 $\frac{4(a-1)}{4-a} = \frac{4-a}{a-1}$, 即 $a = 2$ 时, 等号成立, 所以 $\frac{a}{4-a} + \frac{1}{a-1}$ 的最小值是 2.

解法 2 (换元法) 因为 $1 < a < 4$, 所以 $4-a > 0, a-1 > 0$. 令 $x = 4-a, y = a-1$, 则 $x+y=3$, 故 $\frac{a}{4-a} + \frac{1}{a-1} = \frac{4-x}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{x} + \frac{1}{y} - 1 = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{y} \right) (x+y) - 1 = \frac{1}{3} \left(5 + \frac{4y}{x} + \frac{x}{y} \right) - 1 \geq \frac{1}{3} \left(5 + 2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{x}{y}} \right) - 1 = 2$, 当且仅当 $\frac{4y}{x} = \frac{x}{y}$, 即 $x = 2y, a = 2$ 时, 等号成立, 故 $\frac{a}{4-a} + \frac{1}{a-1}$ 的最小值是 2.

12. 解: (1) $A = \left\{ x \mid \frac{2x-4}{x-5} \leq 1 \right\} = \{x \mid -1 \leq x < 5\}$,

$B = \{x \mid x^2 - 2mx + m^2 - 1 \leq 0\} = \{x \mid m-1 \leq x \leq m+1\}$.

因为 $A \cup B = A$, 所以 $B \subseteq A$, 所以 $\begin{cases} m-1 \geq -1, \\ m+1 < 5, \end{cases}$ 解得 $0 \leq m < 4$.

即实数 m 的取值范围是 $[0, 4)$.

(2) 因为 $A \cap C = A$, 所以 $A \subseteq C$,

所以 $x^2 - ax - a + 1 \geq 0$ 在 $\{x | -1 \leq x < 5\}$ 上恒成立,

即 $a(x+1) \leq x^2 + 1$ 在 $\{x | -1 \leq x < 5\}$ 上恒成立,

① 当 $x = -1$ 时, $a \in \mathbf{R}$;

② 当 $-1 < x < 5$ 时, $a \leq \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ 恒成立,

而 $\frac{x^2 + 1}{x + 1} = (x + 1) + \frac{2}{x + 1} - 2 \geq 2\sqrt{2} - 2$,

当且仅当 $x + 1 = \frac{2}{x + 1}$, 即 $x = \sqrt{2} - 1$ 时, 等号成立,

所以 $\frac{x^2 + 1}{x + 1}$ 的最小值为 $2\sqrt{2} - 2$, 故 $a \leq 2\sqrt{2} - 2$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 2\sqrt{2} - 2]$.

13. 解: (1) 若 $a = -2$, 则 $y = -2x^2 + 3x - 4 < 0$, 对应的函数的图象开口向下. 因为 $\Delta = 9 - 4 \times 2 \times 4 < 0$, 所以所求不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

(2) 由题意, 得 $ax^2 + (1 - a)x + a - 2 \geq -2$, 即 $ax^2 + (1 - a)x + a \geq 0$ 对一切实数 x 恒成立.

当 $a = 0$ 时, $x \geq 0$, 不满足题意;

当 $a \neq 0$ 时, $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = (1 - a)^2 - 4a^2 \leq 0, \end{cases}$ 解得 $a \geq \frac{1}{3}$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\left\{a \mid a \geq \frac{1}{3}\right\}$.

(3) 由题意可得 $ax^2 + (1 - a)x + a - 2 < a - 1$, 即 $ax^2 + (1 - a)x - 1 < 0$.

当 $a = 0$ 时, 不等式可化为 $x < 1$, 所以不等式的解集为 $\{x | x < 1\}$.

当 $a > 0$ 时, $ax^2 + (1 - a)x - 1 < 0$, 即 $(ax + 1)(x - 1) < 0$, 解得 $-\frac{1}{a} < x < 1$.

当 $a < 0$ 时, $ax^2 + (1 - a)x - 1 < 0$, 即 $(ax + 1)(x - 1) < 0$.

① 当 $a = -1$ 时, 解集为 $\{x | x \neq 1\}$;

② 当 $-1 < a < 0$ 时, 解集为 $\left\{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > -\frac{1}{a}\right\}$;

③ 当 $a < -1$ 时, 解集为 $\left\{x \mid x > 1 \text{ 或 } x < -\frac{1}{a}\right\}$.

综上所述,

当 $a < -1$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid x > 1 \text{ 或 } x < -\frac{1}{a}\right\}$;

当 $a = -1$ 时, 不等式的解集为 $\{x | x \neq 1\}$;

当 $-1 < a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > -\frac{1}{a}\right\}$;

当 $a = 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x | x < 1\}$;

当 $a > 0$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{a} < x < 1\right\}$.

14. 解: (1) 设甲工程队的总报价为 y 元, 则

$$y = 150 \times 2 \left(x + \frac{16}{x}\right) \times 3 + 400 \times 16 + 800$$

$$= 900 \left(x + \frac{16}{x}\right) + 7200 \geq 900 \times 2 \sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} + 7200$$

$$= 14400,$$

当且仅当 $x = \frac{16}{x}$, 即 $x = 4$ 时, 等号成立.

即当宽为 4 米时, 甲工程队的报价最低, 最低为 14400 元.

(2) 由题意, 得 $900 \left(x + \frac{16}{x}\right) + 7200 > \frac{900a(x+2)}{x}$ 对 $x \in [2, 6]$ 恒成立.

$$\text{即 } a < \frac{x^2 + 8x + 16}{x + 2}.$$

$$\text{令 } y = \frac{x^2 + 8x + 16}{x + 2} = (x + 2) + \frac{4}{x + 2} + 4.$$

因为 $2 \leq x \leq 6$, 所以 $4 \leq x + 2 \leq 8$.

令 $t = x + 2$, $t \in [4, 8]$,

则 $y = t + \frac{4}{t} + 4$ 在 $[4, 8]$ 上单调递增,

所以当 $t = 4$ 时, $y_{\min} = 9$.

所以 $0 < a < 9$.

即 a 的取值范围是 $(0, 9)$.

专题 2 函数的概念、图象与性质

1. D 函数 $f(x) = -x$, $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 所以排除 A, B. 函数 $f(x) = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 排除 C.

2. B 解法 1 (排除法) $f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{-(x+1)+2}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}$, 对于 A, $f(x-1) - 1 = \frac{2}{x} - 2$, 不是奇函数; 对于 B, $f(x-1) + 1 = \frac{2}{x}$, 是奇函数; 对于 C, $f(x+1) - 1 = \frac{2}{x+2} - 2$, 不是奇函数; 对于 D, $f(x+1) + 1 = \frac{2}{x+2}$, 不是奇函数.

解法 2 (直接法) $f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{-(x+1)+2}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}$ 的图象关于点 $(-1, -1)$ 中心对称, 该图象向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度后得到的图象关于点 $(0, 0)$ 中心对称.

3. D 令 $t = x(x-a)$, 则 $f(t) = 2^t$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 根据复合函数的单调性可知, $t = x(x-a)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 则对称轴 $x = \frac{a}{2} \geq 1$, 所以 $a \geq 2$.

4. D 因为 $f(x) = \frac{xe^x}{e^{ax}-1}$, 所以 $f(-x) = \frac{-xe^{-x}}{e^{-ax}-1} = \frac{-xe^{ax-x}}{1-e^{ax}} = \frac{xe^{ax-x}}{e^{ax}-1}$. 因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(-x) = f(x)$. 所以 $e^x = e^{ax-x}$, 即 $x = (a-1)x$. 所以 $a-1=1$, 即 $a=2$.

5. B 当 $x \geq 0$ 时, 由 $y_1 = e^x$, $y_2 = \ln(x+1)$ 均单调递增,

可知 $f(x)$ 单调递增, 则要使得 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 必有

$$\begin{cases} -a \geq 0, \\ -a \leq e^0 + \ln 1, \end{cases} \quad \text{解得 } -1 \leq a \leq 0.$$

易错警示 分段函数单调递增, 则需要各段都单调递增, 还要考虑“接点”处函数值的大小关系, 即接点处左端函数值小于或等于右端函数值.

6. D 设 $F(x) = f(x) - g(x) = a(x+1)^2 - 1 - (\cos x + 2ax) = ax^2 + a - 1 - \cos x, x \in (-1, 1)$, 易知函数 $F(x)$ 是偶函数. 因为当 $x \in (-1, 1)$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 恰有一个交点, 所以函数 $F(x)$ 有唯一零点, 结合函数 $F(x)$ 是偶函数知 $F(0) = 0$, 即 $a - 1 - \cos 0 = 0$, 解得 $a = 2$. 若 $a = 2$, 则 $F(x) = 2x^2 + 1 - \cos x, x \in (-1, 1)$. 又因为 $2x^2 \geq 0, 1 - \cos x \geq 0$, 所以 $F(x) \geq 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时, 等号成立, 即 $F(x)$ 有且仅有一个零点 0, 所以 $a = 2$ 符合题意.

7. BD $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \pm \frac{1}{2}\right\}$, 关于坐标原点对称. 又 $f(-x) = \ln|1-2x| - \ln|-2x-1| = \ln|2x-1| - \ln|2x+1| = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为定义域上的奇函数. 当 $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 时, $f(x) = \ln(2x+1) - \ln(1-2x)$, 且 $y = \ln(2x+1)$ 在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增, $y = \ln(1-2x)$ 在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增, B 正确; 当 $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 时, $f(x) = \ln(-2x-1) - \ln(1-2x) = \ln \frac{2x+1}{2x-1} = \ln\left(1 + \frac{2}{2x-1}\right)$. 因为 $\mu = 1 + \frac{2}{2x-1}$ 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减, $y = \ln \mu$ 在定义域内单调递增, 可知 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减, D 正确, C 错误; 根据奇函数图象的对称性知 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减, A 错误.

8. ABC 令 $x = y = 0$, 则 $f(0) = 0$, 故 A 正确; 令 $x = y = 1$, 则 $f(1) = 0$, 故 B 正确; 令 $x = y = -1$, 则 $f(1) = 2f(-1) = 0$, 故 $f(-1) = 0$, 令 $y = -1$, 则 $f(-x) = f(x) + x^2 f(-1) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 故 C 正确;

解法 1 对于选项 D, 令 $f(x) = 0$, 则满足题意, 但 $x = 0$ 不是它的极小值点, 故 D 错误.

解法 2 【分析】 对于选项 D, 通过 $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$ 来构造同构式来找出满足条件的一般函数.

因为 $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$, 当 $x^2 y^2 \neq 0$ 时, 有 $\frac{f(xy)}{(xy)^2} = \frac{f(x)}{x^2} + \frac{f(y)}{y^2}$, 故可设 $\frac{f(x)}{x^2} = \log_a |x|$ ($a > 0, a \neq 1$), 即 $f(x) = x^2 \log_a |x|$, 故 $f(x) = \begin{cases} 0, & x=0, \\ x^2 \log_a |x|, & x \neq 0, \end{cases}$ 故 D 错误.

解法 3 对于选项 D, 令 $y = x$, 则 $f(x^2) = 2x^2 f(x)$. 因为 $f(x)$ 是偶函数, 所以只需要研究 $x > 0$ 的情况, 要使 $x = 0$

为 $f(x)$ 的极小值点, 则有 $x \in (0, x_0)$ ($x_0 < \frac{\sqrt{2}}{2}$) 时, $f(x)$ 单调递增. 取 $x \in (0, x_0)$, 则 $0 < x^2 < x < 1$, 且 $0 < 2x^2 < 1$,

①若 $f(x) > 0$, 则 $f(x^2) > 0, \frac{f(x^2)}{f(x)} = 2x^2 < 1$, 即 $f(x^2) < f(x)$; ②若 $f(x) < 0$, 则 $f(x^2) < 0$, 即 $\frac{-f(x^2)}{-f(x)} = 2x^2 < 1$, 即 $f(x^2) > f(x)$, 此时, 在 $(0, x_0)$ 上, $f(x)$ 必然不会单调递增, 所以 D 错误.

解后反思 研究抽象函数问题时, 通常采用特殊化的方法来进行处理, 同时, 也可以用所学习过的基本初等函数的性质来寻找相关的函数模型来帮助处理问题.

9. 2 **解法 1 (定义法)** 设 $y = f(x) = (x-1)^2 + ax + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = x^2 + (a-2)x + \cos x + 1$ 为偶函数, 定义域为 $\mathbf{R}$, 则 $f(-x) = x^2 - (a-2)x + \cos(-x) + 1 = x^2 + (a-2)x + \cos x + 1$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 $a = 2$.

解法 2 (奇偶性质法) 因为 $y = x^2 + (a-2)x + \cos x + 1$, 由于函数 $y = x^2, y = \cos x, y = 1$ 都是偶函数, 若 $a \neq 2$, 则 $y = (a-2)x$ 为奇函数, 此时 $y = x^2 + (a-2)x + \cos x + 1$ 非奇非偶; 若 $a = 2$, 则 $y = x^2 + (a-2)x + \cos x + 1$ 为偶函数.

解后反思 解法 1 是用偶函数的定义解题, 解法 2 是用函数奇偶性的性质解题, 显然本题解法 2 优于解法 1.

10. $-\frac{1}{2} \ln 2$ **解法 1** $f(-x) + f(x) = \ln \left| a + \frac{1}{1+x} \right| + \ln \left| a + \frac{1}{1-x} \right| + 2b = \ln \left| \frac{(a+1)^2 - a^2 x^2}{1-x^2} \right| + 2b = 0$ 恒成立, 故 $\frac{(a+1)^2 - a^2 x^2}{1-x^2}$ 为常数, 从而 $(a+1)^2 = a^2$, 解得 $a = -\frac{1}{2}$, 此时有 $\ln \frac{1}{4} + 2b = 0$, 即 $b = \ln 2$.

解法 2 定义域关于原点对称. 由 $a + \frac{1}{1-x} \neq 0$ 可得 $(1-x)(a+1-ax) \neq 0$, 所以 $x = \frac{a+1}{a} = -1$, 解得 $a = -\frac{1}{2}$, 即函数的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, 再由 $f(0) = 0$ 可得 $b = \ln 2$, 即 $f(x) = \ln \left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{1-x} \right| + \ln 2 = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$, 满足 $f(-x) = -f(x)$, 符合题意.

11. 1 因为 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$, 即 $(-x)^3(a \cdot 2^{-x} - 2^x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 对一切实数 x 恒成立, 整理得 $(a-1)(2^x + 2^{-x}) = 0$, 故 $a = 1$.

12. 解: (1) 取 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_2) - f(x_1) = \frac{2^{x_2} + a}{2^{x_2} + 1} - \frac{2^{x_1} + a}{2^{x_1} + 1} = \frac{(a-1)(2^{x_1} - 2^{x_2})}{(2^{x_2} + 1)(2^{x_1} + 1)}$.

因为 $a < 1$, 所以 $a-1 < 0, x_1 < x_2$, 所以 $2^{x_1} - 2^{x_2} < 0, 2^{x_2} + 1 > 0, 2^{x_1} + 1 > 0$, 故 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$, 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

(2) 因为 $f(x_1) + f(x_2) = 1$, 所以 $\frac{2^{x_2} + a}{2^{x_2} + 1} + \frac{2^{x_1} + a}{2^{x_1} + 1} = 1$.

$$\frac{a-1}{2^{x_2}+1}+1+\frac{a-1}{2^{x_1}+1}+1=1, \text{即}(a-1)\left(\frac{1}{2^{x_2}+1}+\frac{1}{2^{x_1}+1}\right)=-1.$$

当 $a>1$ 时, $(a-1)\left(\frac{1}{2^{x_2}+1}+\frac{1}{2^{x_1}+1}\right)>0$, 不成立;

当 $a=1$ 时, 不成立;

当 $a<1$ 时, $\frac{1}{2^{x_2}+1} \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \frac{1}{2^{x_1}+1} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 故 $\frac{1}{2^{x_2}+1}+\frac{1}{2^{x_1}+1} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 故 $\frac{1}{2} < \frac{1}{1-a} < \frac{3}{2}$, 解得 $-1 < a < \frac{1}{3}$.

综上所述, $a \in \left(-1, \frac{1}{3}\right)$.

13. 解: (1) 因为 $f(x), g(x)$ 分别是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数和奇函数, 所以 $\begin{cases} f(x)+g(x)=e^x, \\ f(-x)+g(-x)=f(x)-g(x)=e^{-x}, \end{cases}$ 解得 $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

$$(2) 2f(x)-a[g(x)]^2=e^x+e^{-x}-a \cdot \frac{(e^x-e^{-x})^2}{4} \geq 0.$$

设 $t=e^x+e^{-x}$, 因为 $x \in (0, \ln 3)$, 所以 $t=e^x+e^{-x} > 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}}=2$ 且在区间 $(0, \ln 3)$ 上单调递增, 所以 $t \in \left(2, \frac{10}{3}\right)$.

$$\text{又}(e^x-e^{-x})^2=(e^x+e^{-x})^2-4=t^2-4>0, \text{所以 } a \leq \frac{4(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2}=\frac{4t}{t^2-4}=\frac{4}{t-\frac{4}{t}}.$$

所以原命题等价于 $a \leq \frac{4}{t-\frac{4}{t}}$ 在 $t \in \left(2, \frac{10}{3}\right)$ 上恒成立.

因为 $y=t-\frac{4}{t}$ 在 $t \in \left(2, \frac{10}{3}\right)$ 上单调递增, 所以 $y=t-\frac{4}{t} \in \left(0, \frac{32}{15}\right)$, 所以 $\frac{4}{t-\frac{4}{t}} > \frac{15}{8}$, 所以 $a \leq \frac{15}{8}$.

故实数 a 的取值范围是 $\left(0, \frac{15}{8}\right]$.

14. 解: (1) 易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

因为函数 $f(x)=\log_2(4^x+1)+kx$ 为偶函数,

所以 $f(-x)=f(x)$, 即 $\log_2(4^{-x}+1)-kx=\log_2(4^x+1)+kx$,

$$\text{所以 } 2kx=\log_2(4^{-x}+1)-\log_2(4^x+1)=\log_2 \frac{4^{-x}+1}{4^x+1}$$

$$\log_2 4^{-x}=-2x,$$

所以 $k=-1$.

$$(2) f(x)=\log_2(4^x+1)-x=\log_2\left(\frac{4^x+1}{2^x}\right)=$$

$$\log_2\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right).$$

设 $x_2>x_1 \geq 0$,

$$y_2-y_1=\left(2^{x_2}+\frac{1}{2^{x_2}}\right)-\left(2^{x_1}+\frac{1}{2^{x_1}}\right)=(2^{x_2}-2^{x_1})+$$

$$\left(\frac{1}{2^{x_2}}-\frac{1}{2^{x_1}}\right)=\frac{(2^{x_2}-2^{x_1})(2^{x_2}2^{x_1}-1)}{2^{x_2}2^{x_1}}.$$

因为 $x_2>x_1 \geq 0$, 所以 $2^{x_2}>2^{x_1} \geq 1, 2^{x_2}-2^{x_1}>0, 2^{x_2}2^{x_1}>1, y_2-y_1>0$,

所以当 $x \geq 0$ 时, $y=2^x+\frac{1}{2^x}$ 单调递增,

且 $y=\log_2 x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

又函数 $f(x)$ 为偶函数, 所以函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减.

因为 $f(2m+1)>f(m-1)$,

所以 $|2m+1|>|m-1|$,

解得 $m<-2$ 或 $m>0$,

所以不等式的解集为 $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.

(3) 由题意得函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有 2 个公共点,

所以 $g(x)=\log_2(a \cdot 2^x+a)=f(x)=\log_2(4^x+1)-$

$x=\log_2\left(\frac{4^x+1}{2^x}\right)$ 有两个解,

即 $a \cdot 2^x+a=\frac{4^x+1}{2^x}=2^x+\frac{1}{2^x}$ 有两个解.

设 $t=2^x>0$, 则 $at+a=t+\frac{1}{t}$, 即 $(a-1)t^2+at-1=0$.

又 $t=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

所以方程 $(a-1)t^2+at-1=0$ 有两个不等的正根,

$$\text{从而 } a \text{ 必须满足 } \begin{cases} a-1 \neq 0, \\ \Delta=a^2-4(a-1) \cdot (-1) > 0, \\ -\frac{a}{a-1} > 0, \\ -\frac{1}{a-1} > 0, \end{cases}$$

解得 $2\sqrt{2}-2 < a < 1$,

所以实数 a 的取值范围是 $(2\sqrt{2}-2, 1)$.

专题 3 幂指对函数及函数的综合应用

1. C 因为 $I(t)=\frac{K}{1+e^{-0.23(t-53)}}$, 所以 $I(t^*)=\frac{K}{1+e^{-0.23(t^*-53)}}=0.95K$, 则 $e^{0.23(t^*-53)}=19$, 所以 $0.23(t^*-53)=\ln 19 \approx 3$, 解得 $t^* \approx \frac{3}{0.23}+53 \approx 66$.

2. B 因为函数的定义域为 $[-2.8, 2.8]$, 且 $f(-x)=-x^2+(e^{-x}-e^x)\sin(-x)=-x^2+(e^x-e^{-x})\sin x=f(x)$, 所以该函数为偶函数, 可排除 A, C; $f(1)=-1+\left(e-\frac{1}{e}\right) \cdot \sin 1 > -1+\left(e-\frac{1}{e}\right) \sin \frac{\pi}{6}=-1+\frac{e}{2}-\frac{1}{2e} > 0$, 排除 D.

3. A 【分析】 由函数 $f(x)=e^{-(x-1)^2}$ 的解析式特征不难想到, 把复合函数 $f(x)$ 拆成常见函数 $y=e^t, g(x)=-(x-1)^2$. 由于函数 $y=e^t$ 为定义域 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 故只需比较 $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 的大小即可.