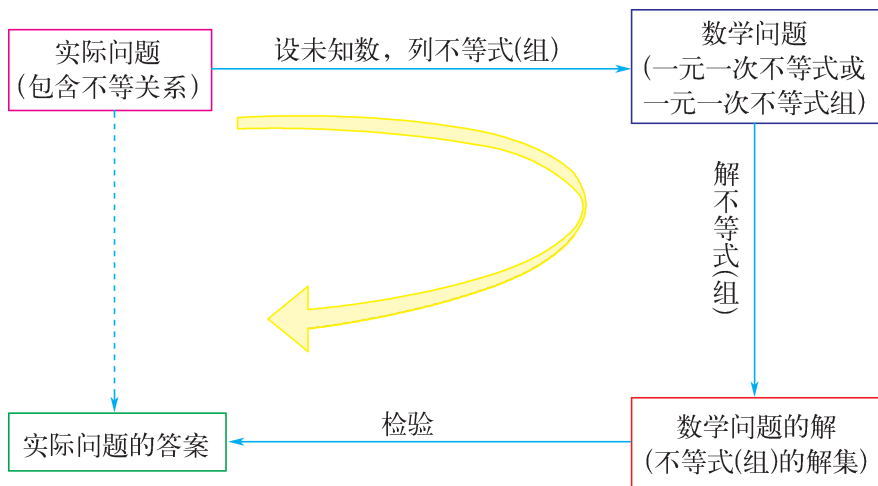




第十一章 不等式与不等式组



知识回放



名师精讲

考点一 不等式及其解集

例1 某品牌手机公司对遵循 5G 标准的单台手机专利许可费不高于 2.5 美元, 则下面表示专利许可费 x 的不等关系正确的是 ()

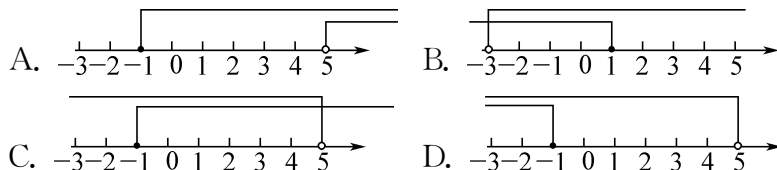
- A. $x > 2.5$ B. $x < 2.5$ C. $x \leq 2.5$ D. $x \geq 2.5$

分析 不高于即是小于等于, 据此列出不等式即可.

答案 C

例2 解不等式组 $\begin{cases} 3-x \geq 4 \text{ ①,} \\ \frac{2}{3}x + 1 > x - \frac{2}{3} \text{ ②} \end{cases}$ 时, 不等式①②的

解集在同一条数轴上表示正确的是 ()



分析 先求出不等式组中各个不等式的解集, 再在数轴上表示出来. 解不等式①, 得 $x \leq -1$; 解不等式②, 得 $x < 5$. 从可知 D 选项正确.

答案 D

知识链接

用“ $>$ ”“ $\geq$ ”“ $<$ ”“ $\leq$ ”“ $\neq$ ”等符号表示不等关系的式子, 叫作不等式.



关键提示

本题解题关键是理解“不高于”的意义.

知识链接

把不等式的解集在数轴上表示出来, “ $>$ ”“ $\geq$ ”向右画; “ $<$ ”“ $\leq$ ”向左画, 其中“ $\geq$ ”“ $\leq$ ”要用实心圆点表示; “ $<$ ”“ $>$ ”要用空心圆点表示.



考点二 不等式的性质

例3 若关于 x 的不等式 $mx+1>0$ 的解集是 $x<\frac{1}{5}$, 则关于 x 的不等式 $(m-1)x>-1-m$ 的解集是 ()

- A. $x<-\frac{2}{3}$ B. $x>-\frac{2}{3}$ C. $x<\frac{2}{3}$ D. $x>\frac{2}{3}$

分析 因为关于 x 的不等式 $mx+1>0$ 的解集是 $x<\frac{1}{5}$, 所以 $m=-5$. 把 $m=-5$ 代入 $(m-1)x>-1-m$, 得 $-6x>4$, 解得 $x<-\frac{2}{3}$.

答案 A



考点三 解一元一次不等式

例4 解不等式: $\frac{1}{3}(1-2x)>\frac{3(2x-1)}{2}$, 并把它的解集在数轴上表示出来.

解: 去分母, 得 $2(1-2x)>3\times 3(2x-1)$.

...

(1) 请完成上述解不等式的余下步骤.

(2) 解题回顾: 本题“去分母”这一步的变形依据是 _____ (填“A”或“B”).

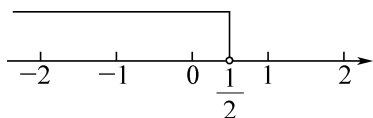
A. 不等式两边都乘(或除以)同一个正数, 不等号的方向不变.

B. 不等式两边都乘(或除以)同一个负数, 不等号的方向改变.

分析 (1) 按照解一元一次不等式的步骤解答即可.

(2) 本题“去分母”这一步的变形依据是不等式两边都乘(或除以)同一个正数, 不等号的方向不变.

答案 (1) 去括号, 得 $2-4x>18x-9$. 移项, 得 $-4x-18x>-9-2$. 合并同类项, 得 $-22x>-11$. 系数化为1, 得 $x<\frac{1}{2}$. 不等式的解集在数轴上表示如下.



(2) A

知识链接

不等式的性质: 不等式的两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式, 不等号的方向不变; 不等式的两边都乘(或除以)同一个正数, 不等号的方向不变; 不等式的两边都乘(或都除以)同一个负数, 不等号的方向改变.

方法与点拨

解一元一次不等式的基本方法与解一元一次方程基本相同.



考点四 解一元一次不等式组

例5 若不等式组 $\begin{cases} 5-x>2, \\ 2x+3>0 \end{cases}$ 的最小整数解是 a , 最大整

数解是 b , 则 $a+b$ 的值是 ()

- A. 2 B. 1 C. 4 D. 0

分析 分别求出每一个不等式的解集, 根据口诀“同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到”确定不等式组的解集, 继而得出其最大、最小整数解, 从而得出答案. 解不等式 $5-x>2$, 得 $x<3$. 解不等式 $2x+3>0$, 得 $x>-1.5$. 所以不等式组的解集为 $-1.5<x<3$, 所以其最小整数解 $a=-1$, 最大整数解 $b=2$, 所以 $a+b=-1+2=1$.

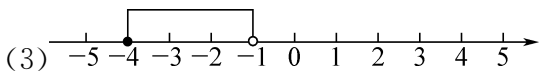
答案 B

例6 已知不等式组 $\begin{cases} 2x-1\geq-9 \text{ ①,} \\ -3x+2>5 \text{ ②,} \end{cases}$ 请结合题意填空:

- (1) 解不等式①, 得 _____.
- (2) 解不等式②, 得 _____.
- (3) 把不等式①和不等式②的解集在数轴上表示出来.
- (4) 原不等式组的解集为 _____.

分析 分别求出每一个不等式的解集, 并将解集在数轴上表示出来, 从而得出两个不等式解集的公共部分, 即可得出答案.

答案 (1) $x\geq-4$ (2) $x<-1$



(4) $-4\leq x<-1$

例7 (2024春·崇川区期末) 某学校准备一次性购买若干个足球和篮球(每个足球的价格相同, 每个篮球的价格相同). 若购买3个足球和2个篮球共需490元; 购买2个足球和4个篮球共需660元.

(1) 购买一个足球、一个篮球各需多少元?

(2) 根据该学校的实际情况, 需要一次性购买足球和篮球共62个, 要求购买足球和篮球的总费用不超过6750元, 则该学校最多可以购买多少个篮球?

分析 (1) 根据条件, 列得关于足球、篮球单价的二元一次方程组, 解之即可得出结论.



关键提示

本题考查的是一元一次不等式组的整数解, 正确求出每一个不等式的解集是解题关键.

方法与点拨

解一元一次不等式组时, 正确求出每一个不等式的解集是基础, 熟知“同大取大; 同小取小; 相对取中; 相背取空”的原则是解答此题的关键.

方法与点拨

解决本类实际问题的关键是: (1) 找准等量关系, 正确列出二元一次方程组; (2) 根据各数量间的关系, 找出一元一次不等式(组), 求其符合题意的整数最值.



(2) 利用总价=单价 $\times$ 数量,结合总价不超过 6 750 元,可列出关于足球、篮球个数的一元一次不等式,解之可得出篮球个数的取值范围,再取其中的最大整数,即可得出结论.

答案 解:(1) 设购买一个足球需要 x 元,一个篮球需要 y 元,根据题意,得
$$\begin{cases} 3x+2y=490, \\ 2x+4y=660, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x=80, \\ y=125. \end{cases}$$

答:购买一个足球需要 80 元,一个篮球需要 125 元.

(2) 设该学校可以购买 m 个篮球,则购买 $(62-m)$ 个足球. 根据题意,得 $80(62-m)+125m \leq 6\,750$, 解得 $m \leq \frac{358}{9}$. 又因为 m 为正整数,所以 m 的最大值为 39.

答:该学校最多可以购买 39 个篮球.



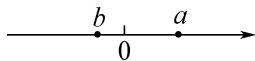
抢分必做



1. 若 $a < b$, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $a-3 > b-3$ B. $3a > 3b$ C. $\frac{a}{3} > \frac{b}{3}$ D. $-3a > -3b$

2. 已知 $a=2x+1$, $b=4-x$, 且 a, b 在数轴上的位置如图所示, 则 x 的取值范围是_____.



3. 在平面直角坐标系中, 如果一个点的横、纵坐标均为整数, 那么我们称该点是“整点”. 若“整点” $P(m+2, 2m-1)$ 在第四象限, 则 m 的值为_____.

4. (1) 解不等式: $-\frac{1}{2}(x-1) \geq 3-x$; (2) 解不等式组:
$$\begin{cases} 3x < 5x+6, \\ \frac{x+1}{6} \geq \frac{x-1}{2}. \end{cases}$$



5. 已知关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x - y = 4m, \\ 2x + y = -m + 3 \end{cases}$ 的解满足 $x + y > -5$, 求 m 的取值范围.

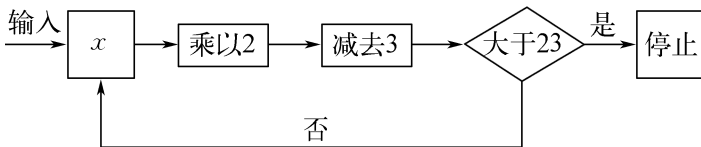
6. 某商店销售 A, B 两种头盔, 批发价和零售价如下表, 请解答下列问题.

名称	A 种头盔	B 种头盔
批发价(元/个)	60	40
零售价(元/个)	80	50

- (1) 第一次, 该商店批发 A, B 两种头盔共 120 个, 用去 5 600 元, 问: A, B 两种头盔各批发了多少个?
- (2) 第二次, 该商店用 7 200 元钱仍然批发这两种头盔(批发价和零售价不变), 要想将第二次批发的两种头盔全部售完后, 所获利润不低于 2 160 元, 则该超市第二次至少批发 A 种头盔多少个?



7. 某学校的编程课上, 一位同学设计了一个运算程序, 如图所示. 按上述程序进行运算, 程序运行到“判断结果是否大于 23”为一次运行. 若该程序只运行了 2 次就停止了, 则 x 的取值范围是_____.





8. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 9-2x > 1, \\ x-m \geq 1 \end{cases}$ 有 6 个整数解, 则 m 的取值范围是 ()
- A. $-4 < m \leq -3$ B. $-3 \leq m < -2$ C. $-4 \leq m < -3$ D. $-3 < m \leq -2$
9. 对于任意有理数 a, b , 定义一种运算: $a \ast b = b - 2a$. 例如, $3 \ast 5 = 5 - 2 \times 3 = -1$. 根据上述定义可知, 不等式 $(3x-4) \ast 1 > 3$ 的最大整数解是_____.
10. 某汽车专卖店销售 A, B 两种型号的新能源汽车. 上周售出 1 辆 A 型车和 3 辆 B 型车, 销售额为 96 万元; 本周已售出 2 辆 A 型车和 1 辆 B 型车, 销售额为 62 万元.
- (1) 求每辆 A 型车和 B 型车的售价各为多少元.
- (2) 甲公司拟向该店购买 A, B 两种型号的新能源汽车共 6 辆, 购车费不少于 130 万元, 且不超过 140 万元, 则有哪几种购车方案?
- (3) 在第(2)问的基础上, 哪一个方案花费最少?

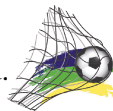


11. (2024 春 · 海安市期末) 已知实数 x, y, m 满足 $x^2 + 2y^2 + m = 16$, $6x^2 - 2y^2 + m = 20$, 则代数式 $\frac{11}{4}x^2 + y^2$ 的最小值为 ()
- A. 3 B. 4 C. $\frac{31}{5}$ D. $\frac{165}{7}$



临门一脚

世界上万事万物的“相等”是相对的, 而“不等”是绝对的, 本章从最简单的一元一次不等式出发, 研究不等式的性质、不等式的基本解法, 进而求解不等式组, 并由此解决一些实际问题, 突出了模型思想、化归思想.



0. $3a + 385 > 0.24a + 412$ 时, 解得 $a > 450$. 所以当 $a > 450$ 时, 选择方案 B 更划算.

答: 当购买的宣纸数量超过 200 张且不足 450 张时, 选择方案 A 更划算; 当购买的宣纸数量等于 450 张时, 选择两方案所需费用相同; 当购买的宣纸数量超过 450 张时, 选择方案 B 更划算.

第十一章 不等式与不等式组

1. D

2. $x > 4$

3. -1 或 0 **提示:** 因为点 $P(m+2, 2m-1)$

在第四象限, 所以 $\begin{cases} m+2 > 0, \\ 2m-1 > 0, \end{cases}$ 解得 $-2 < m < \frac{1}{2}$. 因为点的横、纵坐标均为整数, 所以 m 是整数, 所以 m 的值为 -1 或 0.

4. **解:** (1) 去分母, 得 $-(x-1) \geq 2(3-x)$. 去括号, 得 $-x+1 \geq 6-2x$. 移项, 得 $2x-x \geq 6-1$. 合并同类项, 得 $x \geq 5$.

(2) 解不等式 $3x < 5x+6$, 得 $x > -3$. 解不等式 $\frac{x+1}{6} \geq \frac{x-1}{2}$, 得 $x \leq 2$. 所以原不等式组的解集为 $-3 < x \leq 2$.

5. **解:** 解题中二元一次方程组, 得 $\begin{cases} x=m+1, \\ y=-3m+1, \end{cases}$ 代入 $x+y > -5$, 得 $-2m+2 > -5$, 解得 $m < \frac{7}{2}$.

6. **解:** (1) 设 A 种头盔批发了 x 个, B 种头盔批发了 y 个.

根据题意, 得 $\begin{cases} x+y=120, \\ 60x+40y=5\ 600, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} x=40, \\ y=80. \end{cases}$$

答: A 种头盔批发了 40 个, B 种头盔批发了 80 个.

(2) 设该超市第二次批发 A 种头盔 a 个.

根据题意, 得 $(80-60)a + (50-40) \times \frac{7\ 200-60a}{40} \geq 2\ 160$, 解得 $a \geq 72$. 经检验, $a = 72$ 符合题意, 所以 a 的最小值为 72.

答: 第二次该商店至少批发 72 个 A 种头盔.

7. $8 < x \leq 13$

易错警示

类似问题必须考虑有一侧可取等号.

8. A

9. 0 **提示:** 由条件可知, $1-2(3x-4) > 3$, 解得 $x < 1$. 所以最大整数解是 0.

10. **解:** (1) 设每辆 A 型车的售价为 x 万元, 每辆 B 型车的售价为 y 万元.

根据题意, 得 $\begin{cases} x+3y=96, \\ 2x+y=62, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=18, \\ y=26. \end{cases}$

答: 每辆 A 型车的售价为 18 万元, 每辆 B 型车的售价为 26 万元.

(2) 设购买 A 型车 a 辆, 则购买 B 型车 $(6-a)$ 辆.

根据题意, 得 $\begin{cases} 18a+26(6-a) \geq 130, \\ 18a+26(6-a) \leq 140, \end{cases}$ 解得 $2 \leq a \leq \frac{13}{4}$.

因为 a 为整数, 所以 a 可以取 2, 3, 所以共有 2 种购车方案.

方案一: 购买 A 型车 2 辆, B 型车 4 辆;
方案二: 购买 A 型车 3 辆, B 型车 3 辆.

(3) 方案一的花费为 $18 \times 2 + 26 \times 4 = 140$ (万元); 方案二的花费为 $18 \times 3 + 26 \times 3 = 132$ (万元). 因为 $140 > 132$, 所以方案二花费最少.

11. C **提示:** $x^2 + 2y^2 + m = 16$, $6x^2 - 2y^2 + m = 20$, 两式联立, 作差消去 m , 得 $5x^2 - 4y^2 = 4$, 即 $4y^2 = 5x^2 - 4$. 所以代数式 $\frac{11}{4}x^2 + y^2 + 4 = \frac{1}{4}(11x^2 + 4y^2 + 16) = \frac{1}{4}(11x^2 + 5x^2 - 4 + 16) = \frac{1}{4}(16x^2 + 12) = 4x^2 + 3$. 因为 $4y^2 = 5x^2 - 4 \geq 0$, 所以 $x^2 \geq \frac{4}{5}$, 则