

第一章

空间向量与立体几何

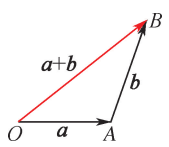
知识梳理与重点解读

1. 空间向量的相关概念

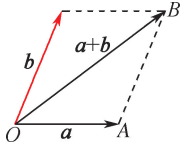
- (1) 空间向量:具有大小和方向的量.
- (2) 单位向量:长度(或模)为 1 的向量.
- (3) 零向量:长度(或模)为 0 的向量. 方向任意
- (4) 相等向量:方向相同且模相等的向量.
- (5) 相反向量:长度相等而方向相反的向量.
- (6) 共线向量(平行向量):表示若干空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合. 零向量与任意向量平行

2. 空间向量的线性运算

空间中任意两个向量都是共面的,它们的加、减、数乘运算类似于平面向量的加、减、数乘运算(如图).

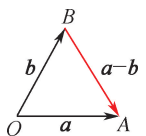


向量加法的三角形法则



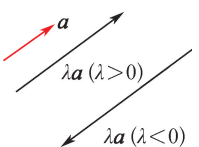
向量加法的平行四边形法则

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{a} + \vec{b}$$



向量减法的三角形法则

$$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{a} - \vec{b}$$



向量数乘

3. 共线向量与共面向量

	共线向量	共面向量
定义	如果表示若干空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合,那么这些向量叫作共线向量或平行向量	平行于同一个平面的向量,叫作共面向量
定理	对任意两个空间向量 $\vec{a}, \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0})$, $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow$ 存在实数 $\lambda \in \mathbf{R}$, 使 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$	对不共线的两个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ 与 $\vec{a}, \vec{b}$ 共面 $\Leftrightarrow$ 存在唯一的有序实数对 (x, y) , 使 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$

4. 空间向量的数量积运算

(1) 空间向量的夹角

定义:如图所示,已知两个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 在空间中任取一点 O , 作 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$, 则 $\angle AOB$ 叫作向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角.

成长笔记

拓展 1

和空间向量的线性运算有关的结论

(1) 在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 有 $\vec{AC_1} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}$.

(2) 若点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 则 $\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{0}$.

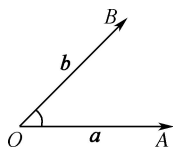
(3) 若 O 为空间中任意一点, 则①若 P 为线段 AB 的中点, 则 $\vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$; ②若点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 则 $\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$.

拓展 2

共线定理与共面定理的推论

(1) A, P, B 三点共线 $\Leftrightarrow \vec{AP} = \lambda \vec{AB} (\lambda \in \mathbf{R}) \Leftrightarrow \vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \vec{AB} (\lambda \in \mathbf{R}) \Leftrightarrow \vec{OP} = m\vec{OA} + n\vec{OB} (m + n = 1, \text{点 } O \text{ 不在直线 } AB \text{ 上})$.

(2) A, P, B, C 四点共面 $\Leftrightarrow \vec{AP} = \mu \vec{AB} + \nu \vec{AC} (\mu, \nu \in \mathbf{R}) \Leftrightarrow \vec{OP} = \vec{OA} + \mu \vec{AB} + \nu \vec{AC} (\mu, \nu \in \mathbf{R}) \Leftrightarrow \vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC} (x + y + z = 1, A, B, C \text{ 不共线})$.



记法: $\langle a, b \rangle$.

范围: $0 \leq \langle a, b \rangle \leq \pi$, 当 $\langle a, b \rangle = \frac{\pi}{2}$ 时, $a \perp b$.

(2) 数量积

定义: 已知两个非零向量 a, b , 则 $|a| |b| \cos \langle a, b \rangle$ 叫作 a, b 的数量积, 记作 $a \cdot b$, 即 $a \cdot b = |a| |b| \cos \langle a, b \rangle$. 特别地, 零向量与任意向量的数量积为 0, 即 $0 \cdot a = 0$.

几何意义: 向量 a, b 的数量积等于 a 的长度 $|a|$ 与 b 在 a 的方向上的投影 $|b| \cos \langle a, b \rangle$ 的乘积, 或等于 b 的长度 $|b|$ 与 a 在 b 的方向上的投影 $|a| \cos \langle a, b \rangle$ 的乘积.

空间向量的数量积满足运算律:

$$(\lambda a) \cdot b = \lambda (a \cdot b), \lambda \in \mathbf{R};$$

$$a \cdot b = b \cdot a \text{ (交换律);}$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ (分配律).}$$

重点解读

空间向量数量积的性质

- (1) $a \cdot e = |a| \cos \langle a, e \rangle$ (其中 e 为单位向量);
- (2) 若 a, b 为非零向量, 则 $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$;
- (3) $a \cdot a = |a|^2$ 或 $|a| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a^2}$;
- (4) 若 a, b 为非零向量, 则 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$;
- (5) $|a \cdot b| \leq |a| |b|$ (当且仅当 a, b 共线时, 等号成立).

5. 空间向量基本定理

(1) 空间向量基本定理

定理: 如果三个向量 a, b, c 不共面, 那么对任意一个空间向量 p , 存在唯一的有序实数组 (x, y, z) , 使得 $p = xa + yb + zc$.

(2) 基底与基向量

如果三个向量 a, b, c 不共面, 那么所有空间向量组成的集合就是 $\{p | p = xa + yb + zc, x, y, z \in \mathbf{R}\}$. 这个集合可看作由向量 a, b, c 生成的, 我们把 $\{a, b, c\}$ 叫作空间的一个基底, a, b, c 都叫作基向量. 空间任意三个不共面的向量都可以构成空间的一个基底.

特别地, 如果空间的一个基底中的三个基向量两两垂直, 且长度都为 1, 那么这个基底叫作单位正交基底, 常用 $\{i, j, k\}$ 表示.

(3) 正交分解

对空间中的任意向量 a , 均可以分解为三个向量 xi, yj, zk , 使 $a = xi + yj + zk$. 像这样, 把一个空间向量分解为三个两两垂直的向量, 叫作把空间向量正交分解.

重点解读

1. 如何判断一组向量是否可以作为空间向量的一个基底?

空间任意三个不共面的向量都可以构成空间的一个基底. 判断一组向量能否作为空间的一个基底, 实质是判断这三个向量是否共面. 若不共面, 则可以作为一个基底.

2. 空间向量基本定理有哪些应用?

- (1) 证明平行、共面;
- (2) 证明垂直或求线线夹角;
- (3) 求向量的模.

6. 空间向量及其运算的坐标表示

(1) 空间直角坐标系

成长笔记

C 三点不共线, 点 O 不在平面 ABC 上).

拓展 3

求空间向量数量积的基本方法

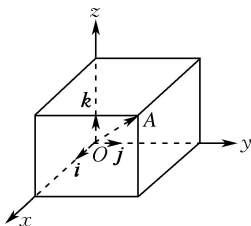
(1) 定义法: 已知向量 a, b 的模长和夹角时, 用公式 $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \langle a, b \rangle$ 直接计算.

(2) 基底法: 若向量 a, b 可通过基底线性表示, 且已知基底的模长和夹角, 则利用数量积的定义和运算法则求解.

(3) 坐标法: 若 $a = (x_1, y_1, z_1)$, $b = (x_2, y_2, z_2)$, 则 $a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.



以空间一点 O 为原点, 建立三条两两垂直的数轴: x 轴、 y 轴、 z 轴. 这就是空间直角坐标系 $Oxyz$.



(2) 空间向量的坐标运算

设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则 $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$;

$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$, $\lambda \in \mathbf{R}$;

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$;

$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 不能省略, 否则不成立

当 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 时, $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b} \Leftrightarrow a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, a_3 = \lambda b_3 (\lambda \in \mathbf{R})$;

$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$;

$|\mathbf{a}| = \sqrt{a^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$;

$\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$.

重点解读

空间向量坐标表示的注意点?

(1) 空间向量的坐标顺序必须与基底中的基向量对应, 即若基底为 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{e}_1 + \mu \mathbf{e}_2 + k \mathbf{e}_3$, 则 $\mathbf{b}$ 的坐标为 (λ, μ, k) .

(2) 向量的坐标由起点、终点的坐标共同决定, 并不受起点位置的影响.

7. 空间向量的应用

(1) 空间中点、直线和平面的向量表示

① $\mathbf{a}$ 是直线 l 的方向向量, 在直线 l 上取 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, 设 P 是空间中任意一点, 如图 1. 点 P 在直线 l 上 $\Leftrightarrow$ 存在实数 t , 使得 $\overrightarrow{AP} = t\mathbf{a}$, 即 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$.

取定空间中任意一点 O , 如图 2, 点 P 在直线 l 上 $\Leftrightarrow$ 存在实数 t , 使 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ 或 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ (其中 $x+y=1$).

② 取定空间中任意一点 O , 如图 3, 空间一点 P 在平面 ABC 内 $\Leftrightarrow$ 存在实数 x, y , 使 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

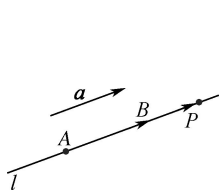


图 1

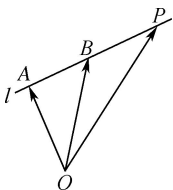


图 2

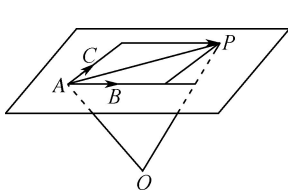
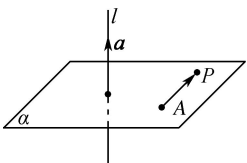


图 3

(2) 平面的法向量

如图, 直线 $l \perp$ 平面 α , 取直线 l 的方向向量 $\mathbf{a}$, 我们称向量 $\mathbf{a}$ 为平面 α 的**法向量**. 给定一点 A 和一个向量 $\mathbf{a}$, 那么过点 A , 且以向量 $\mathbf{a}$ 为法向量的平面是完全确定的, 可以表示为集合 $\{P | \mathbf{a} \cdot \overrightarrow{AP} = 0\}$.



►► 拓展 4

平面法向量的性质

(1) 平面 α 的一个法向量垂直于与平面 α 共面的所有向量.

(2) 一个平面的法向量有无数个, 它们互相平行.



重点解读

1. 怎样用空间向量体现空间位置?

位置关系	向量表示
直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$	$l_1 // l_2 \quad \mathbf{n}_1 // \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2$
	$l_1 \perp l_2 \quad \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$
直线 l 的方向向量为 $\mathbf{n}$, 平面 α 的法向量为 $\mathbf{m}$	$l // \alpha \quad \mathbf{n} \perp \mathbf{m} \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0$
	$l \perp \alpha \quad \mathbf{n} // \mathbf{m} \Leftrightarrow \mathbf{n} = \lambda \mathbf{m}$
平面 α, β 的法向量分别为 $\mathbf{n}, \mathbf{m}$	$\alpha // \beta \quad \mathbf{n} // \mathbf{m} \Leftrightarrow \mathbf{n} = \lambda \mathbf{m}$
	$\alpha \perp \beta \quad \mathbf{n} \perp \mathbf{m} \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0$

2. 空间向量在几何中的应用有哪些?

(1) 共线、共面的证明: 利用空间向量的共线定理和共面定理, 可以证明空间中的点是否共线、直线是否共面.

(2) 平行证明: 包括线线平行、线面平行和面面平行的证明.

(3) 垂直证明: 包括线线垂直、线面垂直和面面垂直的证明.

(4) 空间角求解: 可以计算空间中两条直线之间的夹角、直线与平面之间的夹角以及两个平面之间的夹角.

(5) 距离求解: 利用空间向量的模和数量积, 可以计算点到点、点到线、点到面以及异面直线之间的距离.

题型精解

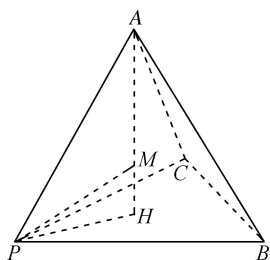
题型一 空间向量的线性运算

例 1 (2025 天津南开期中) 在正四面体 $P-ABC$ 中, 过点 A 作平面 PBC 的垂线, 垂足为点 H , 点 M 满足 $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AH}$, 则 $\overrightarrow{PM} =$ ()

- A. $\frac{1}{4}\overrightarrow{PA} - \frac{3}{4}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{PC}$ B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{PC}$
C. $\frac{1}{4}\overrightarrow{PA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{PC}$ D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{PA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{PB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{PC}$

答案 B

解析 在正四面体 $P-ABC$ 中, 因为 $AH \perp$ 平面 PBC , 所以点 H 是 $\triangle PBC$ 的中心. 如图, 连接 PH , 则 $\overrightarrow{PH} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$, 所以 $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{PA} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{PH} - \overrightarrow{PA}) = \overrightarrow{PA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{PH} - \frac{3}{4}\overrightarrow{PA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PA} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{PC}$.



小点拨

正四面体顶点的射影是底面的中心, $\{\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}\}$ 是一个基底, 由空间向量的线性运算, 即可求解.

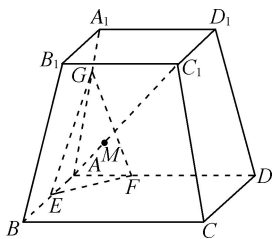


解后反思

空间向量的线性运算主要包括向量加法、减法、数乘. 其中向量加法与向量减法运算可通过平行四边形法则与三角形法则实现, 数乘运算要注意方向问题.

题型二 共线、共面向量定理的应用

例 2 (2025 湖北宜昌期中) 如图, 在正四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2A_1B_1$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A_1A}$, 直线 AC_1 与平面 EFG 交于点 M , 则 $\frac{AM}{AC_1} =$ _____.



答案 $\frac{6}{23}$

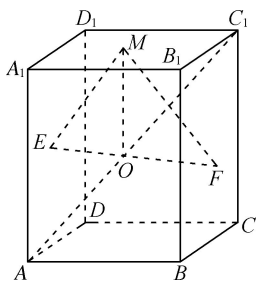
解析 依题意, 得 $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}$, 在正四棱台中, $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$. 设 $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AC_1}$, 则 $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{3}\lambda\overrightarrow{AG} + \lambda\overrightarrow{AE} + \frac{3}{2}\lambda\overrightarrow{AF}$. 因为 M, G, E, F 四点共面, 所以 $\frac{4}{3}\lambda + \lambda + \frac{3}{2}\lambda = 1$, 解得 $\lambda = \frac{6}{23}$, 所以 $\frac{AM}{AC_1} = \frac{6}{23}$.

题型三 空间向量的数量积及其应用

例 3 (2025 山东聊城期中) 已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, $AA_1 = 2AD = 4$, O 为对角线 AC_1 的中点, 过点 O 的直线与长方体表面交于 E, F 两点, M 为长方体表面上的动点, 则 $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF}$ 的取值范围是 _____.

答案 $[-5, 5]$

解析 由题易得 O 为正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的中心, 由对称性可得 O 为 EF 的中点, 则 $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OE}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OF}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OE}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OE}) = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{EO}^2$. 因为 $AA_1 = 2AD = 4$, $AB = AD = 2$, $AC_1 = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}$, 所以 $|\overrightarrow{MO}|, |\overrightarrow{EO}| \in [1, \sqrt{6}]$, 所以 $\overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{EO}^2 \in [-5, 5]$.



小分析

因为 A, M, C_1 三点共线, 所以 $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AC_1}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$), 求 $\frac{AM}{AC_1}$ 可转化为求 λ .

由直线 AC_1 与平面 EFG 交于点 M , 知 M, G, E, F 四点共面. 用基向量 $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}$ 表示 $\overrightarrow{AM}$, 由 M, G, E, F 四点共面的充要条件, 即可求解.

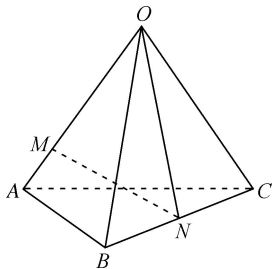


解后反思

注意到 $\overrightarrow{ME}$ 与 $\overrightarrow{MF}$ 均为动态向量,且涉及中线,可利用极化恒等式进行转化.极化恒等式的三角形模式解决的是共起点或共终点的两个向量的数量积的取值范围问题.当遇到动点或运动变化等因素时,考虑化动为定或化一般为特殊,通过求动点与定点的距离的最值,从而求出数量积的取值范围.

题型四 空间向量基本定理及应用

例 4 (2025 河北邢台期中)在四面体 $O-ABC$ 中, M 为线段 OA 上靠近点 A 的四等分点, N 为 BC 的中点.若 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$,则 $x+y+z=$ _____.



答案 $\frac{1}{4}$

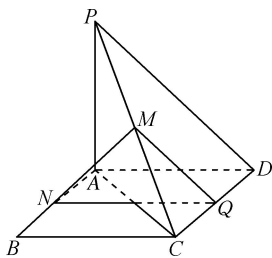
解析 由空间向量基本定理可得 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=-\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$. 又 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$, 所以 $\begin{cases} x=-\frac{3}{4}, \\ y=\frac{1}{2}, \\ z=\frac{1}{2}. \end{cases}$ 所以 $x+y+z=\frac{1}{4}$.

解后反思

构建等量关系时,需要利用空间向量基本定理进行转化,可以建立方程组,进而求解未知数.

题型五 利用空间向量证明平行、垂直问题

例 5 如图所示,四边形 $ABCD$ 为矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=AD$, M, N, Q 分别是 PC, AB, CD 的中点,求证:



- (1) $MN \parallel$ 平面 PAD ;
- (2) 平面 $MNQ \parallel$ 平面 PAD .

小点拨

证法 1 若 $\overrightarrow{MN}$ 能用平面 PAD 内的一个基底线性表示,则 $\overrightarrow{MN}$ 与平面 PAD 共面.

证法 2 取平面 PAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$.

(1) 只需证明平面 PAD 的法向量与向量 $\overrightarrow{MN}$ 的数量积为 0 即可.

(2) 只需证明平面 PAD 的法向量与平面 MNQ 中的两个向量垂直即可.