

高中数学

小题才王做[®]

.....选择性必修第一册 RA.....

主 编 恩波教育研究中心
编 委 雷秋华 宋克金 葛爱菊
崔华梅 孙续桂

图书在版编目 (CIP) 数据

高中数学小题狂做：选择性必修. 第一册：RA /
恩波教育研究中心主编. --南京：南京大学出版社，
2021.4(2025.4重印)
ISBN 978-7-305-24274-8

I. ①高… II. ①恩… III. ①中学数学课—高中—习
题集 IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2021) 第 043108 号

出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093

GAOZHONG SHUXUE XIAOTI KUANGZUO • XUANZEXING BIXIU DI-YI CE • RA

书 名 高中数学小题狂做·选择性必修第一册·RA
主 编 恩波教育研究中心
责任编辑 刘 琦 编辑热线 025-83530763

印 刷 江苏美尚佳彩印刷有限公司
开 本 880 mm×1230 mm 1/16 开 印张 7 字数 145 千
版 次 2021 年 4 月第 1 版 2025 年 4 月第 5 次印刷
ISBN 978-7-305-24274-8
定 价 49.80 元

网 址 <http://www.njupco.com>
官方微博 <http://weibo.com/njupco>
官方微信 njupress
销售咨询热线 025-83594756

* 版权所有,侵权必究
* 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购
图书销售部门联系调换

目录 Contents

第一章 空间向量与立体几何

1.1 空间向量及其运算	
限时小练1 空间向量及其线性运算	1
限时小练2 空间向量的数量积运算	4
1.2 空间向量基本定理	
限时小练3 空间向量基本定理(1)	7
限时小练4 空间向量基本定理(2)	10
1.3 空间向量及其运算的坐标表示	
限时小练5 空间直角坐标系	13
限时小练6 空间向量运算的坐标表示	16
1.4 空间向量的应用	
限时小练7 空间中点、直线和平面的向量表示	18
限时小练8 空间中直线、平面的平行	20
限时小练9 空间中直线、平面的垂直	22
限时小练10 用空间向量研究距离问题	24
限时小练11 用空间向量研究夹角问题(1)	26
限时小练12 用空间向量研究夹角问题(2)	29
微专题一 立体几何中探索性问题的研究	33
章末提优	35
真题小练	38

第二章 直线和圆的方程

2.1 直线的倾斜角与斜率	
限时小练13 倾斜角与斜率	39
限时小练14 两条直线平行和垂直的判定	41
2.2 直线的方程	
限时小练15 直线的点斜式方程	43
限时小练16 直线的两点式方程	45
限时小练17 直线的一般式方程	47
2.3 直线的交点坐标与距离公式	
限时小练18 两条直线的交点坐标 两点间的距离公式	49

提升索引 见答案

► **方法** 判断一组向量能否作为一组基底的方法/4
► **易错** 直线与平面平行的必要不充分条件/11
► **方法** 用向量证明直线、平面平行的方法/12
► **易错** 异面直线所成角与两直线的方向向量的夹角之间的区别/19
► **突破** 熟记向量法求线面角的公式/22

► **方法** 求动直线过定点的方法/31
► **突破** 根据斜率判断两直线的位置关系/32
► **易错** 采用截距式求直线方程时的注意点/35
► **方法** 用待定系数法求圆的方程/42
► **方法** 二元函数的最值求法/43
► **方法** 判断直线与圆的位置关系的方法/45
► **方法** 求直线与圆相交时弦长的方法/45

限时小练 19 点到直线的距离公式 两条平行线间的距离	51
微专题二 直线方程的综合运用	53
2.4 圆的标准方程	
限时小练 20 圆的标准方程	54
限时小练 21 圆的一般方程	56
2.5 直线与圆、圆与圆的位置关系	
限时小练 22 直线与圆的位置关系(1)	58
限时小练 23 直线与圆的位置关系(2)	60
限时小练 24 圆与圆的位置关系	62
微专题三 与圆有关的最值、定值问题	64
章末提优	66
真题小练	69
阶段温习(第一章)	70

第三章 圆锥曲线的方程

3.1 椭圆	
限时小练 25 椭圆及其标准方程	72
限时小练 26 椭圆的简单几何性质(1)	74
限时小练 27 椭圆的简单几何性质(2)	77
限时小练 28 椭圆的应用	80
3.2 双曲线	
限时小练 29 双曲线及其标准方程	82
限时小练 30 双曲线的简单几何性质	84
3.3 抛物线	
限时小练 31 抛物线及其标准方程	87
限时小练 32 抛物线的简单几何性质	89
限时小练 33 抛物线的应用	91
微专题四 轨迹与方程问题	93
微专题五 圆锥曲线中的中点弦问题	94
微专题六 圆锥曲线中的范围、最值问题	96
微专题七 圆锥曲线中的定点、定值问题	98
微专题八 圆锥曲线中的证明与探索性问题	100
微专题九 新定义问题	102
章末提优	104
真题小练	107
阶段温习(第一章—第二章)	108

►方法	用待定系数法求椭圆方程的一般步骤/57
►方法	解决与中点弦相关问题的方法/63
►易错	正确理解双曲线的定义/64
►突破	圆与圆的位置关系在圆锥曲线问题中的应用/66
►突破	对称性在圆锥曲线问题中的应用/67
►突破	几何法在求圆锥曲线最值时的应用/68
►方法	有关抛物线弦长问题的解决方法/73
►方法	圆锥曲线中的点差法/75

典题讲评与答案详析(另册,思路分析、易错警示、方法总结、解题突破)

小帮手(另册,知识梳理与重点解读、题型精解、疑难突破)

第一章 空间向量与立体几何

1.1 空间向量及其运算

限时小练 1 空间向量及其线性运算

建议用时:40 分钟 答案 P1

训练要点

空间向量的概念及空间向量的线性运算,方向向量,共面向量

一、单项选择题:本题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

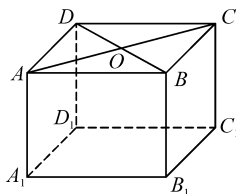
1. 下列关于空间向量的说法正确的是 ()

- A. 若向量 a, b 平行,则 a, b 所在的直线平行
- B. 若 $|a| = |b|$,则 a, b 的长度相等且方向相同或相反
- C. 若向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ 满足 $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{CD}|$,则 $\overrightarrow{AB} > \overrightarrow{CD}$
- D. 相等向量其方向必相同

2. 如图,在四棱柱的上底面 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,则下列向量相等的是

()

- A. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CB}$
- B. $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$
- C. $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{DB}$
- D. $\overrightarrow{DO}$ 与 $\overrightarrow{OB}$



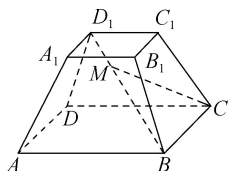
3. 已知空间向量 a, b ,且 $\overrightarrow{AB} = a + 2b, \overrightarrow{BC} = -5a + 6b, \overrightarrow{CD} = 7a - 2b$,则一定共线的三点是 ()

- A. A, B, D
- B. A, B, C
- C. B, C, D
- D. A, C, D

4. 已知 $O-ABC$ 为空间四面体, P 为底面 ABC 上一点,且满足 $2\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$,则下列等式一定成立的是 ()

- A. $x + y + z = 1$
- B. $x + y + z = 0$
- C. $x + y + z = -1$
- D. $x + y + z = 2$

5. (教材变式)如图是元代数学家郭守敬主持建造的观星台,其可近似看作一个正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,若 $AB = 2A_1B_1$,点 M 在 BD_1 上,且 $BM = 3D_1M$,则 $\overrightarrow{CM} =$ ()



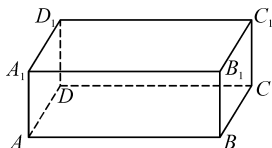
- A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{8}\overrightarrow{AD}$
- B. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{8}\overrightarrow{AD}$
- C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{8}\overrightarrow{AD}$
- D. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1} - \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{8}\overrightarrow{AD}$

6. 在三棱锥 $O-ABC$ 中, $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b, \overrightarrow{OC} = c$,点 M 在直线 OA 上,且 $OM = 2MA$, N 是 BC 的中点,则下列结论错误的是 ()

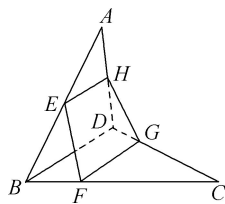
- A. $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(b + c)$
- B. $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$
- C. $\overrightarrow{NA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{NM})$
- D. $\overrightarrow{CM} = -\frac{2}{3}a - c$

二、多项选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

7. 如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=3, AD=2, AA_1=1$, 则以任意两个顶点分别为始点和终点的向量中, 下列说法正确的是 ()

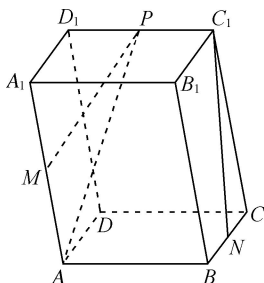


- A. 单位向量有 8 个
B. 与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有 3 个
C. 与 $\overrightarrow{AA_1}$ 相反的向量有 4 个
D. 模为 $\sqrt{5}$ 的向量有 4 个
8. 若向量 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 的起点 M 和终点 A, B, C 互不重合且无三点共线, O 为空间中任意一点, 则下列四个式子能得出 M, A, B, C 四点共面的是 ()
- A. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$
B. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$
C. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
D. $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$
9. 如图, 四边形 $ABCD$ 是空间四边形, E, H 分别是 AB, AD 的中点, F, G 分别是 CB, CD 上的点, 且 $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$, 则 ()



- A. $\overrightarrow{FG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$
B. $\overrightarrow{EH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{FG}$
C. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$
D. 四边形 $EFGH$ 是梯形
- 三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

10. 设 e_1, e_2 是不共线的两个单位向量, 已知 $\overrightarrow{AB} = 2e_1 + ke_2, \overrightarrow{CB} = e_1 + 3e_2, \overrightarrow{CD} = 2e_1 - e_2$. 若 A, B, D 三点共线, 则实数 $k =$ _____.
11. (易错易混) 若 A, B, C, D 为空间不同的四点, 则下列各式为零向量的是 _____ (填序号).
- ① $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}$; ② $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$;
③ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD})$; ④ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}$.
12. 如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 设 $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{c}$, M, N, P 分别是 AA_1, BC, C_1D_1 的中点, 试用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示以下各向量: $\overrightarrow{AP} =$ _____, $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NC_1} =$ _____.

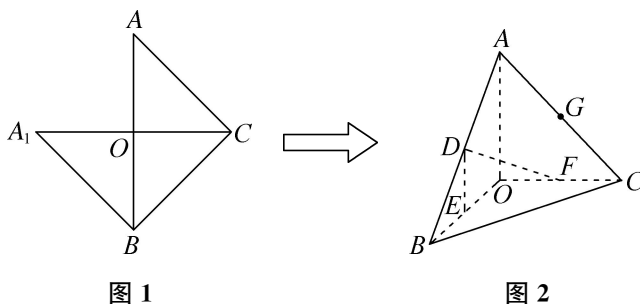


四、解答题: 本题共 13 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

13. **教材变式** 如图 1, 是由三个相同的直角三角形组合而成的一个平面图形, 将其沿 OB , OC 折起使得点 A 与点 A_1 重合, 如图 2, 其中 D, E, F, G 分别为 AB, OB, OC, AC 的中点.

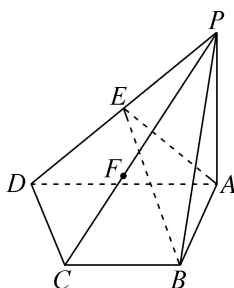
(1) 用 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 表示 $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}$;

(2) 求证: D, E, F, G 四点共面.



— 拓广探索 —

14. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $BC \parallel AD$, $AD = 2BC$, E 是棱 PD 的中点, PC 与平面 ABE 交于点 F , 设 $\overrightarrow{PF} = x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PE}$, 则 $\frac{PF}{PC} =$ _____; $y + z - 2x =$ _____.

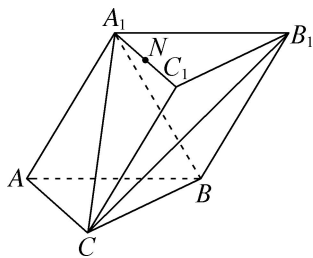


建议用时:40分钟 答案 P24

1. [2025 山东德州一中月考]如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, AA_1 与 BB_1 的距离为 $\sqrt{3}$, $AB=AC=A_1B=2$, $A_1C=BC=2\sqrt{2}$.

(1) 求证:平面 $A_1ABB_1 \perp$ 平面 ABC .

(2) 试判断在棱 A_1C_1 上是否存在点 N ,使得直线 AN 与平面 A_1B_1C 所成角的余弦值是 $\frac{2\sqrt{70}}{35}$? 若存在,请求出点 N 的位置;若不存在,请说明理由.

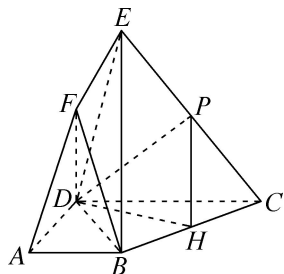


2. [2025 江西宜春一中期末]如图,在多面体 $ABCDEF$ 中, $FD \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ADEF$ 为平行四边形, $AB \parallel CD$, $AD \perp CD$, $FD=AB=AD=\frac{1}{2}CD=2$, P 为 EC 的中点.

(1) 求证: $BF \perp BC$.

(2) 求直线 BD 与平面 BEF 所成角的正弦值.

(3) 在线段 BC 上是否存在一点 H ,使得平面 DHP 与平面 BEF 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{14}$? 若存在,求出 $\frac{BH}{BC}$ 的值;若不存在,请说明理由.



3. [2025 山东胜利一中等三校 12 月联考] 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp DC$, $AB \parallel DC$, $AB = \frac{1}{2}CD = AD = 1$, M 为棱 PC 的中点.

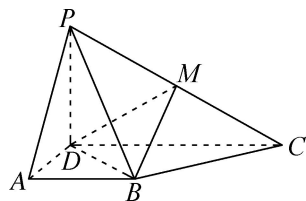
(1) 求证: $BM \parallel$ 平面 PAD .

(2) 若 $PC = \sqrt{5}$, $PD = 1$.

①求二面角 $P-BM-D$ 的余弦值.

②在棱 PA 上是否存在点 Q , 使得点 Q 到平面 BDM 的距离是 $\frac{5\sqrt{6}}{18}$? 若存在, 求出

PQ 的长; 若不存在, 请说明理由.

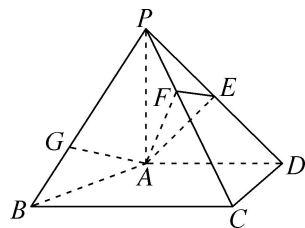


4. [2025 安徽省十期末联考] 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp CD$, $AD \parallel BC$, $PA = AD = CD = 2$, $BC = 3$, E 为 PD 的中点, 点 F 在 PC 上, 且 $\frac{PF}{PC} = \frac{1}{3}$.

(1) 求证: $AE \perp CD$.

(2) 求直线 PB 与平面 AEF 所成角的正弦值.

(3) 在棱 PB 上是否存在点 G , 使得 A, G, E, F 四点共面? 若存在, 求出 $\frac{PG}{PB}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.



章末提优

建议用时:40 分钟 答案 P26

一、单项选择题:本题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

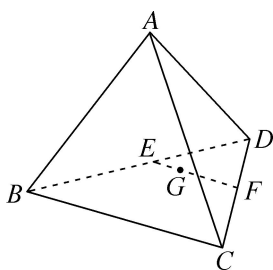
1. [2025 福建部分优质高中期末]已知点 $B(-2,1,1)$ 关于 z 轴的对称点为 A ,则 $|\overrightarrow{AB}| =$ ()

A. $3\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{5}$ D. 2

2. [2025 安徽县中联盟月考]已知向量 $\mathbf{a} = (1, m, -1)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 1)$. 若 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, 则 $m =$ ()

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

3. [2025 江西吉安期末]如图,在正四面体 $ABCD$ 中, E, F 分别为棱 BD, CD 的中点, G 为线段 EF 上一动点,设 $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$, 则 $x =$ ()



A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

4. [2025 山东泰安期中]已知在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, O_1, O 分别为上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 和下底面 $ABCD$ 的中心,则下列与 $\overrightarrow{AD_1}$ 和 $\overrightarrow{A_1C_1}$ 共面的向量是 ()

A. $\overrightarrow{BO_1}$ B. $\overrightarrow{AA_1}$ C. $\overrightarrow{AO_1}$ D. $\overrightarrow{B_1O}$

5. [2025 江西南昌期末]在四棱锥 $P - ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 2$, E 是 PC 上一点,且 $PE = \frac{1}{3}PC$, $PA = \frac{3}{2}$, $PA \perp AB$, $\cos \angle PAD = \frac{5}{12}$, 则 $AE =$ ()

A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

6. [2025 山东淄博期末]正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3,点 M 在棱 AB 上,且 $AM = 2$, P 是正方体下底面 $ABCD$ 内(含边界)的动点,且动点 P 到直线 A_1D_1 的距离与点 P 到点 M 的距离的平方差为 9, 则 PB 的最大值为 ()

A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{6}$ D. $\sqrt{3}$

二、多项选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

7. [2025 江西景德镇期末]下列关于空间向量的说法正确的是 ()

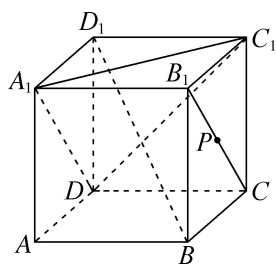
A. 设 $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$, 则 $\{\mathbf{a} - 2\mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 为空间的一组基底

B. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (2, 3, 4)$, 则 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 为钝角

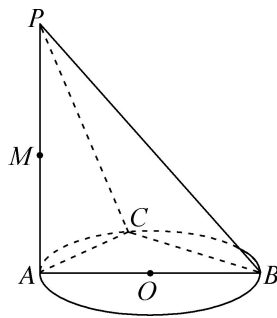
C. 已知向量 $\mathbf{a} = (-3, 2, -2)$, $\mathbf{b} = (1, 2, 2)$, 则 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的投影数量为 1

D. 若对空间中任意一点 P , 都有 $\overrightarrow{PA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PD}$, 则 A, B, C, D 四点共面

8. [2025 安徽合肥六校期末联考]如图,在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为线段 B_1C 上的动点,则下列结论正确的是 ()
- A. 三棱锥 $A_1 - PC_1D$ 的体积为定值
- B. 异面直线 AP 与 A_1D 所成角的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$
- C. 平面 ADP 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
- D. 直线 C_1P 与平面 A_1C_1D 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$



(第 8 题)

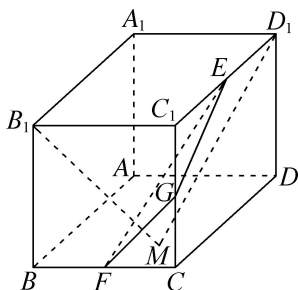


(第 9 题)

9. [2025 广东佛山期末]如图, AB 为圆 O 的直径, C 为圆 O 上异于 A, B 的动点, $PA \perp$ 平面 ABC , M 为 PA 的中点, 且 $PA=3, AB=\sqrt{7}$, 则 ()
- A. BC 的长等于点 B 到直线 PC 的距离
- B. $\angle ACB$ 为二面角 $A - PC - B$ 的平面角
- C. 当 $AC=\sqrt{3}$ 时, BP 与平面 PAC 所成角为 30°
- D. 过点 M 作平面 $\alpha \parallel$ 平面 ABC , 则平面 α 与 PC 交点的轨迹为椭圆

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

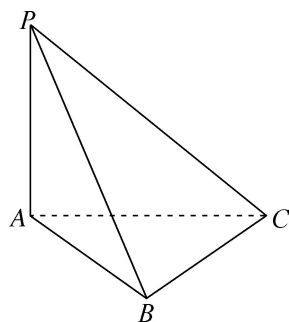
10. [2025 山东泰安期中]定义 $a \otimes b = |a|^2 - a \cdot b$. 若向量 $a = (\sqrt{3}, 0, -3)$, 向量 b 的模为 2, 向量 a 与向量 b 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$, 则 $a \otimes b =$ _____.
11. [2025 浙江台州期末]在四面体 $OABC$ 中, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$, $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}| = 2$. 若直线 OC 与平面 ABC 所成角为 30° , 则 $|\overrightarrow{OB}| =$ _____.
12. [2025 广东省实月考]在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD = AA_1 = 3, AB = 4$, E, F, G 分别是棱 C_1D_1, BC, CC_1 的中点, M 是平面 $ABCD$ 内一动点. 若直线 D_1M 与平面 EFG 平行, 则 $\overrightarrow{MB_1} \cdot \overrightarrow{MD_1}$ 的最小值为 _____.



四、解答题:第 13 题 13 分,第 14 题 15 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

13. [2025 广东肇庆期末]如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $BC = PA = 1$, $PB = AC = \sqrt{2}$.

- (1) 求证: $BC \perp$ 平面 PAB ;
- (2) 求二面角 $A-PC-B$ 的大小.

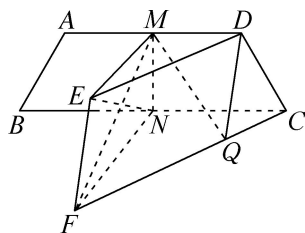


14. [2025 山东潍坊期末]如图,在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = 2AB = 4$, $BC = 6$, M, N 分别是 AD, BC 的中点,将四边形 $MABN$ 沿 MN 翻折至四边形 $MEFN$, Q 为 CF 上一点,且 $FQ = 2QC$.

- (1) 求证: $DQ \parallel$ 平面 $MEFN$.
- (2) 设二面角 $F-MN-C$ 的平面角为 $\theta (0 < \theta < \pi)$.

①若 $\theta = \frac{2\pi}{3}$,求直线 FM 与 CD 所成角的余弦值.

②在翻折过程中,是否存在 θ ,使得直线 NE 与平面 MDQ 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{21}}{14}$? 若存在,求出 θ ;若不存在,请说明理由.



1. [2022 全国乙卷理, 7] 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 AB, BC 的中点, 则 ()
 - A. 平面 $B_1EF \perp$ 平面 BDD_1
 - B. 平面 $B_1EF \perp$ 平面 A_1BD
 - C. 平面 $B_1EF \parallel$ 平面 A_1AC
 - D. 平面 $B_1EF \parallel$ 平面 A_1C_1D
2. [2022 全国甲卷文, 9] 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 30° , 则 ()
 - A. $AB = 2AD$
 - B. AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 30°
 - C. $AC = CB_1$
 - D. B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 45°
3. [2023 全国乙卷理, 9] 已知 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, AB 为斜边, $\triangle ABD$ 为等边三角形. 若二面角 $C - AB - D$ 为 150° , 则直线 CD 与平面 ABC 所成角的正切值为 ()
 - A. $\frac{1}{5}$
 - B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$
 - C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$
 - D. $\frac{2}{5}$

第二章 直线和圆的方程

2.1 直线的倾斜角与斜率

限时小练 13 倾斜角与斜率

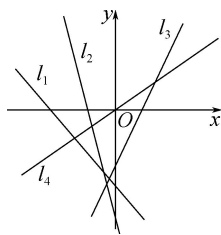
建议用时: 40 分钟 答案 P30

训练要点

直线的倾斜角和斜率, 斜率公式

一、单项选择题: 本题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

- 在平面直角坐标系中, 直线 $x+1=0$ 的倾斜角是 ()
A. 0° B. 45° C. 90° D. 135°
- 下列说法正确的是 ()
A. 直线的倾斜角 α 的取值范围是 $\{\alpha | 0 \leq \alpha \leq \pi\}$
B. 若直线 l 过点 $P(2, \sqrt{3})$, $Q(5, -2\sqrt{3})$, 则直线 l 的倾斜角 $\alpha = \frac{\pi}{6}$
C. 平面直角坐标系中的任意一条直线都有倾斜角, 但不一定有斜率
D. 直线的倾斜角越大, 其斜率就越大
- 直线 l_1, l_2, l_3, l_4 的图象如图所示, 则斜率最小的直线是 ()
A. l_1 B. l_2
C. l_3 D. l_4
- 设直线 l 过坐标原点, 它的倾斜角为 α , 如果将 l 绕坐标原点按逆时针方向旋转 45° , 得到直线 l_1 , 那么 l_1 的倾斜角为 ()
A. $\alpha + 45^\circ$
B. $\alpha - 135^\circ$
C. $135^\circ - \alpha$
D. 当 $0^\circ \leq \alpha < 135^\circ$ 时, 倾斜角为 $\alpha + 45^\circ$; 当 $135^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ 时, 倾斜角为 $\alpha - 135^\circ$
- 【教材变式】已知直线 l 的倾斜角为 30° , 方向向量 $\mathbf{a} = (3, y)$, 则 $y =$ ()
A. $3\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$



- 已知直线 l 经过 $A(2, 1)$, $B(3, t^2)$ ($t \in \mathbf{R}$) 两点, 则直线 l 的倾斜角的取值范围是 ()
A. $[0, \frac{\pi}{4}]$ B. $[0, \pi]$
C. $[0, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$ D. $[0, \frac{\pi}{4}] \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

- 直线 $x + (a^2 + 1)y + 1 = 0$ 的倾斜角的取值可以是 ()
A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{7\pi}{8}$ D. $\frac{\pi}{2}$
- 已知点 $A(2, -3)$, $B(-3, -2)$, 直线 l 的方程为 $-kx + y + k - 1 = 0$, 且与线段 AB 相交, 则直线 l 的斜率 k 的取值可以为 ()

► 方法总结
求动直线过定点的方法 见答案

- A. $\frac{3}{4}$ B. 4 C. -4 D. 0

9. 已知直线 l 经过点 $A(1,0), B(2, \tan \alpha)$, 则下列结论正确的是 ()

- A. 直线 l 的斜率是 $\tan \alpha$
 B. 直线 l 的倾斜角是 α
 C. 直线 l 的方向向量与向量 $\mathbf{a} = (\sin \alpha, \cos \alpha)$ 平行
 D. 直线 l 的法向量与向量 $\mathbf{b} = (\sin \alpha, -\cos \alpha)$ 平行

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

10. 已知点 $A(1,2)$, 若在坐标轴上有一点 P , 使直线 PA 的倾斜角为 135° , 则点 P 的坐标为_____.

11. 已知经过两点 $A(5,m), B(m,8)$ 的直线的斜率大于 1, 则实数 m 的取值范围是_____.

12. 已知点 $A(1,0), B(2,\sqrt{3}), C(m,2m)$, 若直线 AC 的倾斜角是直线 AB 的倾斜角的 2 倍, 则实数 m 的值为_____, 直线 AC 的一个方向向量为_____.

四、解答题: 本题共 13 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

13. 已知点 $A(3,1), B(2,4), C(m,2)$.

- (1) 若直线 BC 的倾斜角为 135° , 求 m 的值.
 (2) 是否存在 m , 使得 A, B, C 三点共线? 若存在, 求出 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

— 拓广探索 —

14. 已知过点 $A(m^2+2, m^2-3), B(3-m-m^2, 2m)$ 的直线 l 的倾斜角为 α . 若 $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi)$, 则实数 m 的取值范围是_____.

建议用时:30分钟 答案 P53

1. [2023 新高考 I 卷,6]过点 $(0, -2)$ 且与圆 $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ 相切的两条直线的夹角为 α ,则 $\sin \alpha =$ ()
 A. 1 B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$
2. [2023 全国乙卷文,11]已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$,则 $x - y$ 的最大值为 ()
 A. $1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. 4 C. $1 + 3\sqrt{2}$ D. 7
3. [2024 全国甲卷理,12]已知 b 是 a, c 的等差中项,直线 $ax + by + c = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$ 交于 A, B 两点,则 $|AB|$ 的最小值为 ()
 A. 1 B. 2 C. 4 D. $2\sqrt{5}$
4. [2022 全国甲卷文,14]设点 M 在直线 $2x + y - 1 = 0$ 上,点 $(3, 0)$ 和 $(0, 1)$ 均在圆 M 上,则圆 M 的方程为_____.
5. [2022 新高考 II 卷,15]设点 $A(-2, 3), B(0, a)$,若直线 AB 关于 $y = a$ 对称的直线与圆 $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 1$ 有公共点,则 a 的取值范围是_____.
6. [2023 新高考 II 卷,15]已知直线 $l: x - my + 1 = 0$ 与圆 $C: (x - 1)^2 + y^2 = 4$ 交于 A, B 两点,写出满足“ $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{8}{5}$ ”的 m 的一个值:_____.
7. [2022 全国乙卷理,14]过四点 $(0, 0), (4, 0), (-1, 1), (4, 2)$ 中的三点的一个圆的方程为_____.
8. [2022 新高考 I 卷,14]写出与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$ 都相切的一条直线的方程:_____.

[学新不忘旧,前面学过的知识看看你还记得吗?]

建议用时:30分钟 答案 P55

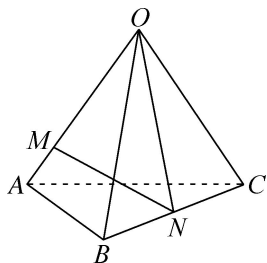
1. [2025 山东济宁期末]已知 $\mathbf{a}=(3,-9,m)$, $\mathbf{b}=(1,n,2)$. 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则 $m+n=$ ()

- A. 3 B. -3 C. 9 D. -9

2. [2025 江苏徐州期末]在棱长为 1 的正四面体 $PABC$ 中, $\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AE}$, 则 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{BC}=$ ()

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{8}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

3. [2025 安徽省十联考期末]在四面体 $O-ABC$ 中, M 为线段 OA 上靠近点 A 的四等分点, N 为 BC 的中点. 若 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$, 则 $x+y+z$ 的值为 ()

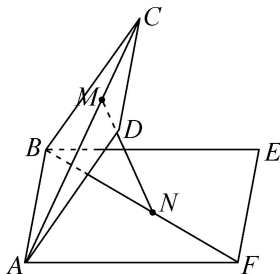


- A. $\frac{1}{4}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

4. [2025 浙江丽水期末] PA, PB, PC 是从点 P 出发的三条射线, 每两条射线的夹角均为 60° , 那么直线 PC 与平面 PAB 所成角的余弦值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

5. [2025 浙江宁波九校期末]在如图所示的试验装置中, 正方形框 $ABCD$ 的边长为 2, 长方形框 $ABEF$ 的长 $BE=\sqrt{2}AB$, 且它们所在平面形成的二面角 $C-AB-E$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$, 活动弹子 M, N 分别在对角线 AC 和 BF 上移动, 且始终保持 $\frac{AM}{AC}=\frac{BN}{BF}=\lambda$ ($0<\lambda<1$), 则当 MN 的长度最小时, λ 的取值为 ()

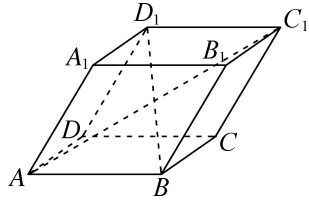


- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{5}$

6. [2025 江西八校协作体联考]在正三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA=AB=2\sqrt{6}$, M 为空间中的一点, 则 $\overrightarrow{MP} \cdot (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$ 的最小值为 ()

- A. -16 B. -14 C. -12 D. -8

7. [多选题][2025 广东大湾区期末]如图,在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = AD = 1, AA_1 = \sqrt{3}$,底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, AA_1 与 AB, AD 所成的角均为 60° ,则下列结论正确的是 ()



- A. $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$
- B. 四边形 B_1BDD_1 为矩形
- C. $\angle C_1AC = 30^\circ$
- D. 如果 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AA_1}$,那么点 M 在平面 A_1BD 内

第三章 圆锥曲线的方程

3.1 椭圆

限时小练 25 椭圆及其标准方程

建议用时: 40 分钟

答案 P56

训练要点

椭圆的定义及相关概念, 椭圆的标准方程

一、单项选择题: 本题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

1. 椭圆 $\frac{x^2}{m^2+12} + \frac{y^2}{m^2+4} = 1$ 的焦距为 ()

A. $4\sqrt{2}$ B. 8 C. 4 D. $2\sqrt{2}$

2. (教材变式) 已知点 $A(-3, 0)$, $B(0, 2)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ 上, 则椭圆的标准方程为 ()

A. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ D. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

3. 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 20, 且顶点 $B(0, -4)$, $C(0, 4)$, 则顶点 A 的轨迹方程是 ()

A. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1 (x \neq 0)$ B. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1 (x \neq 0)$
C. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{20} = 1 (x \neq 0)$ D. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{6} = 1 (x \neq 0)$

4. (教材变式) 设 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{10} + y^2 = 1$ 的两个焦点, O 为坐标原点, 点 P 在椭圆 C 上, 且 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\sqrt{7}$, 则 $|OP| =$ ()

A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{7}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. 3

5. 已知椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆上. 若线段 PF_1 的中点在 y 轴上, 则 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} =$ ()

A. 7 B. 5 C. 4 D. 3

6. 已知 P 是椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$ 上一点, F_1, F_2 分别是椭圆 C 的左、右焦点, 且 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 4$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 ()

A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

7. 设 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 的左、右焦点, P 是椭圆上一点, 且 $|PF_1| - |PF_2| = 2$, 则下列说法正确的是 ()

A. $|PF_1| = 5, |PF_2| = 3$ B. $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形
C. $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 6 D. 点 P 的坐标为 $(2, 3)$

►方法总结
用椭圆定义求动点
轨迹或轨迹方程的
关键 见答案

8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4m} + \frac{y^2}{6-4m} = 1$, 则下列结论正确的是

()

- A. 若椭圆 C 的一个焦点坐标为 $(0, -2)$, 则 $m = \frac{1}{4}$
 B. $1 < m < \frac{3}{2}$ 是椭圆 C 的焦点在 x 轴上的一个必要条件
 C. 椭圆 C 的长轴长为 $4\sqrt{m}$
 D. 椭圆 C 的短轴长与长轴长的平方和为定值

9. 已知 F_1, F_2 为椭圆 C 的两个焦点, 若椭圆 C 上存在一点 P , 使得 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 则椭圆 C 的标准方程可以是

()

- A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ B. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
 C. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

10. **教材变式** 已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上一点 P 到其中一个焦点的距离为 3, 则点 P 到另一个焦点的距离为_____.

11. 已知椭圆的中心在原点, 且经过点 $P(3, 0)$, $a = 3b$, 则椭圆的标准方程为_____.

12. **教材变式** 设圆 $M: (x-2)^2 + y^2 = 36$, $A(-2, 0)$ 为圆 M 内一点, P 为圆上任意一点, 线段 AP 的垂直平分线 l 和半径 MP 相交于点 Q , 当点 P 在圆上运动时, 点 Q 的轨迹方程为_____.

四、解答题: 本题共 13 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

13. 已知两定点 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, 动点 P 满足 $|PF_1| + |PF_2| = 2|F_1F_2|$.

- (1) 求点 P 的轨迹方程;
 (2) 若 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积.

►方法总结
用待定系数法求椭圆方程的一般步骤
见答案

— 拓广探索 —

14. 已知点 $A(6, 3)$, F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的左、右焦点, P 是椭圆 C 上的一动点, 则 $|PA| - |PF_1|$ 的最小值是_____.