

第1章

直线与方程

知识梳理与重点解读

1. 直线的倾斜角与斜率

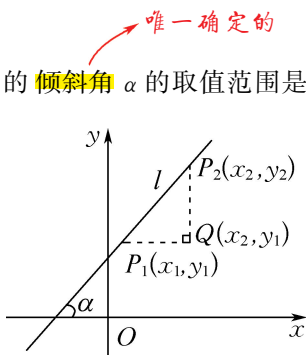
倾斜角:在平面直角坐标系中,对于一条与 x 轴相交的直线,把 x 轴绕着交点按逆时针方向旋转到与直线重合时,所转过的最小正角 α 也能刻画直线的倾斜程度,我们把这个角 α 称为这条直线的倾斜角.

当直线 l 与 x 轴平行或重合时,倾斜角 $\alpha=0$. 因此,直线的倾斜角 α 的取值范围是 $\{\alpha|0\leq\alpha<\pi\}$.

(1) **斜率:** $k=\tan \alpha$ $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

(2) 过两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) (x_1 \neq x_2)$ 的直线的

斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.



重点解读

直线斜率是如何随着倾斜角的变化而变化的?

α 的大小	0	$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$
k 的范围	$k=0$	$k>0$ 随 α 的增大而增大	不存在 所有直线都有倾斜角,但倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$ 的直线没有斜率	$k<0$ 随 α 的增大而增大
图示				

2. 直线方程的形式

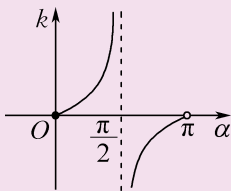
名称	已知条件	直线方程	适用范围
点斜式	直线上一点 $P_1(x_1, y_1)$ 和斜率 k	$y-y_1=k(x-x_1)$	斜率存在
斜截式	斜率 k 和直线在 y 轴上的截距 b	$y=kx+b$	斜率存在
两点式	直线上两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$	$x_1 \neq x_2$ 且 $y_1 \neq y_2$
截距式	直线在 x 轴上的截距 a 和在 y 轴上的截距 b	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	$a \neq 0$ 且 $b \neq 0$
一般式		$Ax+By+C=0 (A, B \text{ 不同时为 } 0)$	任何情况

注意点:

(1) 直线 l 在 x 轴、 y 轴上的截距是直线 l 与 x 轴、 y 轴交点的横、纵坐标,而不是距离.

成长笔记

►拓展1 直线倾斜角范围与斜率范围的关系



(1) 倾斜角范围中含有 $\frac{\pi}{2}$, 斜率范围“靠两边”; 倾斜角范围中不含 $\frac{\pi}{2}$, 斜率范围“夹中间”;

(2) 斜率范围是 $k_1 < k < k_2$, 且范围中含有 0, 则以 0 为界分斜率为正、负, 倾斜角范围分别为 $[0, \theta_2)$, (θ_1, π) , 其中 $\tan \theta_1 = k_1$, $\tan \theta_2 = k_2$; 斜率范围中不含 0, 如 $k < k_1 (k_1 < 0)$, 则倾斜角的范围是 $(\frac{\pi}{2}, \theta_1)$, 其中 $\tan \theta_1 = k_1$, 其他情况类似.

►拓展2

直线在两坐标轴上的截距相等、相反或绝对值相等时, 直线的特征:

(1) 直线在两坐标轴上的截距相等 $\Leftrightarrow$ 直线的斜率为 -1 或直线过原点;

(2) 直线两截距互为相反数 $\Leftrightarrow$ 直线的斜率为 1 或直线过原点;



- (2) 方程 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ 表示不垂直于坐标轴的直线, 方程 $(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$ 表示经过两点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 的任意直线.
- (3) 在求直线方程时, 若不能断定直线是否有斜率, 则应对斜率存在与否加以讨论.
- (4) 在用截距式时, 应先判断截距是否为 0, 若不确定, 则需分类讨论.

重点解读

如何选择合适的直线方程?

- (1) 已知直线的斜率, 常选用点斜式或斜截式.
- (2) 已知直线的横截距和纵截距(截距均不为 0), 可选用截距式.
- (3) 已知直线过某点, 常选用点斜式, 注意讨论斜率是否存在.
- (4) 仅知道直线的横截距, 常设方程为 $x=my+a$ (其中 a 是横截距, m 是参数), 注意此种设法不包含斜率为 0 的情况, 在后面要学的圆锥曲线章节中经常使用.
- (5) 已知直线上横、纵坐标均不同的两点坐标, 可选用两点式.

3. 两条直线的平行与垂直以及两条直线的交点坐标

两条直线平行和垂直的判定

- (1) $l_1 // l_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ l_1, l_2 不重合; $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow |\alpha_1 - \alpha_2| = 90^\circ$.
- (2) $l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$; $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$. 注意直线与坐标轴平行或垂直的特殊情况

两条直线的交点坐标

已知两条直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 相交, 设这两条直线的交点为 P , 则点 P 的坐标是方程组 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ 的解.

4. 如何利用直线方程判断直线的位置关系?

(1) **方程系数法**: 它的依据是应用直线的几何要素, 即一点及方向加以判断, 它是一种几何性质代数化的判断方式.

	斜截式: $l_1: y = k_1x + b_1$; $l_2: y = k_2x + b_2$	一般式: $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 (A_1, B_1 \text{ 不同时为 } 0)$; $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 (A_2, B_2 \text{ 不同时为 } 0)$
l_1, l_2 相交	$k_1 \neq k_2$	$A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$
$l_1 // l_2$	$\begin{cases} k_1 = k_2, \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$	$\begin{cases} A_1B_2 - A_2B_1 = 0, \\ A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0 \end{cases}$
l_1, l_2 重合	$\begin{cases} k_1 = k_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases}$	$\begin{cases} A_1B_2 - A_2B_1 = 0, \\ A_1C_2 - A_2C_1 = 0 \end{cases}$
$l_1 \perp l_2$	$k_1 k_2 = -1$	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

(2) **方程组法**: 它的依据是利用直线的方程构造方程组加以判断, 即应用解析几何的基本思路, 通过方程来研究曲线的几何性质.

方程组 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ 的解	一组	无数组	无解
直线 l_1, l_2 的公共点个数	一个	无数个	零个
直线 l_1, l_2 的位置关系	相交	重合	平行

成长笔记

为 1 或直线过原点;

(3) 直线两截距的绝对值相等 $\Leftrightarrow$ 直线的斜率为 ± 1 或直线过原点.

拓展 3 常见直线系方程

过定点 $P(x_0, y_0)$, 可表示为 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 和 $x = x_0$, 还可以表示为 $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 (A^2 + B^2 \neq 0)$. 可避免讨论斜率不存在的情况

平行于直线 $Ax + By + C = 0$, 可表示为 $Ax + By + \lambda = 0 (\lambda \neq C)$.

垂直于直线 $Ax + By + C = 0$, 可表示为 $Bx - Ay + \lambda = 0$.

过直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 和直线 $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 的交点, 可表示为 $A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$. 该直线系方程不能表示直线 l_2

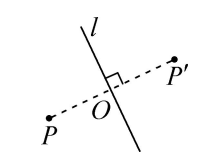
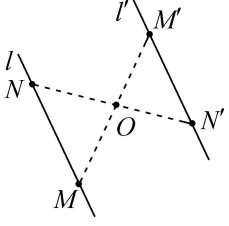
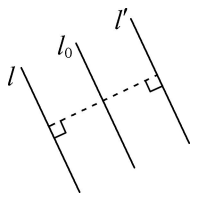
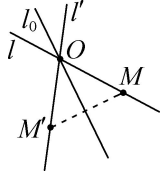
拓展 4 距离的常用结论

(1) 若两点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 在直线 $l: y = kx + b$ 上, 则 $PQ = |x_1 - x_2| \sqrt{1 + k^2} = |y_1 - y_2| \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}$.

(2) $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, 则它的重心的坐标 $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.



5. 与直线有关的对称问题如何求解？

	图示	特征	求解方法
点关于 直线对称	 求点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的对称点 $P'(x', y')$	(1) PP' 的中点 O 在直线 l 上； (2) $k_{PP'}k_l = -1$	线段 PP' 的中点在已知直线上，且直线 PP' 与已知直线垂直，即 $\begin{cases} A \cdot \frac{x_0 + x'}{2} + B \cdot \frac{y_0 + y'}{2} + C = 0, \\ A(y' - y_0) - B(x' - x_0) = 0, \end{cases}$ 解此方程组可得 x', y' ，即得点 P' 的坐标
直线关于 点对称	 求直线 l 关于点 O 对称的直线 l' 的方程	(1) 直线 $l \parallel$ 直线 l' ； (2) 点 O 到直线 l 和直线 l' 的距离相等； (3) 直线 l 上任一点 M 关于点 O 的对称点 M' 在直线 l' 上	方法一 在直线 l 上取两点 M, N ，求出这两点关于点 O 的对称点 M', N' ，则直线 $M'N'$ 的方程即为所求的直线方程 方法二 在直线 l 上取一点 M ，求出它关于点 O 的对称点 M' ，再结合直线 $l' \parallel$ 直线 l 求得直线 l' 的方程 方法三 设直线 l' 上的任一点 $M'(x, y)$ ，求出点 M' 关于点 O 的对称点 M ，根据点 M 在直线 l 上，得出关于 x, y 的方程，即直线 l' 的方程
直线关于 直线对称	 直线 $l: Ax + By + C_1 = 0$ 与直线 $l_0: Ax + By + C = 0$ 平行，求 l 关于 l_0 对称的直线 l' 的方程	(1) 直线 $l \parallel$ 直线 l' ； (2) 直线 l 与直线 l' 到直线 l_0 的距离相等； (3) 直线 l 上任一点关于 l_0 的对称点在直线 l' 上	方法一 利用直线 l' 与直线 l_0 间的距离等于直线 l 与直线 l_0 间的距离 方法二 设直线 l' 的方程为 $Ax + By + C_2 = 0$ ，在直线 l 上找一点 M ，求出点 M 关于直线 l_0 的对称点 $M'(x', y')$ ，再代入 $Ax + By + C_2 = 0$ 解出 C_2 即可
	 直线 l 与直线 l_0 交于点 O ，求 l 关于 l_0 对称的直线 l' 的方程	(1) 直线 l 与直线 l_0 的交点 O 在直线 l' 上； (2) 直线 l 上的任一点 M 关于直线 l_0 的对称点在直线 l' 上	取直线 l 上任意一点 M ，求出其关于直线 l_0 的对称点 M' ，由点 O 和点 M' 求出直线 l' 的方程

成长笔记

(3) 距离模型的代数问题几何化

① 求形如

$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ 的代数式的取值或取值范围问题，转化为动点 $P(x, y)$ 与定点 $Q(x_0, y_0)$ 的距离求解；若出现

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \pm \sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}$ ，则转化为动点 $P(x, y)$ 到定点 $T(a, b), Q(c, d)$ 的距离和或差求解。

② 求形如

$\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (A, B 不同时为 0) 的代数式的取值或取值范围问题，转化为动点 $T(x, y)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离求解；

③ 求形如

$\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (A, B 不同时为 0) 的代数式的取值或取值范围问题，转化为两条平行直线 $Ax+By+C_1=0$ 与 $Ax+By+C_2=0$ 的距离求解。

►拓展 5 常见的点关于直线、直线关于直线的对称结论

(1) 点 $P(x_0, y_0)$ 关于 x 轴的对称点为 $P'(x_0, -y_0)$ ；

(2) 点 $P(x_0, y_0)$ 关于 y 轴的对称点为 $P'(-x_0, y_0)$ ；

(3) 点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $y=x$ 的对称点为 $P'(y_0, x_0)$ ；



6. 平面上的距离

名称	条件	公式	图示
平面上两点间的距离	两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$	$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	
点到直线的距离	点 $P(x_0, y_0)$, 直线 $Ax + By + C = 0$ (其中 A, B 不全为 0)	$d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$	
两条平行直线间的距离	平行直线 $Ax + By + C_1 = 0, Ax + By + C_2 = 0$ (其中 A, B 不全为 0, 且 $C_1 \neq C_2$)	$d = \frac{ C_1 - C_2 }{\sqrt{A^2 + B^2}}$	

温馨提示:

- (1) 用点到直线的距离公式时, 直线方程应为一般式方程.
- (2) 两条平行直线间的距离公式适用于两条直线的方程都是一般式, 并且 x, y 的系数分别对应相等.

重点解读

如何利用对称解决距离和与差的最值问题?

类型	图示	最值
线段之和最小问题(在直线 m 上找一点 P , 使得 $PA + PB$ 最小)	点 A, B 在直线 m 异侧 	$(PA + PB)_{\min} = AB$
	点 A, B 在直线 m 同侧 	$(PA + PB)_{\min} = A'B$

类型	图示	最值
线段之差绝对值最大问题(在直线 m 上找一点 P , 使得 $ PA - PB $ 最大)	点 A, B 在直线 m 同侧 	$ PA - PB _{\max} = AB$
	点 A, B 在直线 m 异侧 	$ PA - PB _{\max} = A'B$

成长笔记

- (4) 点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $y = -x$ 的对称点为 $P'(-y_0, -x_0)$;
- (5) 点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $x = m$ 的对称点为 $P'(2m - x_0, y_0)$;
- (6) 点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $y = n$ 的对称点为 $P'(x_0, 2n - y_0)$.

设直线 l 为 $Ax + By + C = 0$,

- (1) l 关于 x 轴对称的直线方程是 $Ax + B(-y) + C = 0$;
- (2) l 关于 y 轴对称的直线方程是 $A(-x) + By + C = 0$;
- (3) l 关于直线 $y = x$ 对称的直线方程是 $Ay + Bx + C = 0$;
- (4) l 关于直线 $y = -x$ 对称的直线方程是 $A(-y) + B(-x) + C = 0$.



题型精解

题型一 直线的倾斜角与斜率

例1 (2025 浙江宁波期中) 在平面直角坐标系中, 已知某直线沿 x 轴正方向平移 3 个单位长度, 再沿 y 轴负方向平移 2 个单位长度后, 直线回到原来位置, 则此直线的斜率 $k =$ _____.

答案 $-\frac{2}{3}$

解析1 设直线 l 上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 将直线 l 沿 x 轴正方向平移 3 个单位长度, 则点 P 移动后为 $P_1(x_0+3, y_0)$, 再沿 y 轴负方向平移 2 个单位长度, 则点 P_1 移动后为 $P_2(x_0+3, y_0-2)$. 因为 P, P_2 都在直线 l 上, 所以直线 l 的斜率 $k = \frac{y_0-2-y_0}{x_0+3-x_0} = -\frac{2}{3}$.

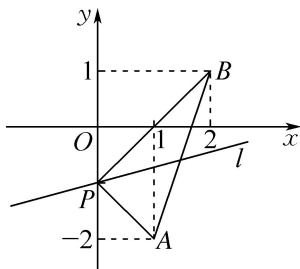
解析2 由于直线沿 x 轴正方向平移 3 个单位长度, 再沿 y 轴负方向平移 2 个单位长度后, 直线回到原来位置, 所以 $\Delta x = 3, \Delta y = -2$, 从而 $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2}{3}$.

例2 (2025 湖北期中) 已知点 $A(1, -2), B(2, 1)$, 经过点 $P(0, -1)$ 作直线 l , 若直线 l 与线段 AB 恒有公共点, 则直线 l 的倾斜角的取值范围是 ()

- A. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ B. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$
C. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ D. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

答案 C

解析 设直线 l 的斜率为 k , 直线 l 的倾斜角为 α , 则 $0 \leq \alpha < \pi$. 因为直线 PA 的斜率为 $\frac{-1-(-2)}{0-1} = -1$, 直线 PB 的斜率为 $\frac{-1-1}{0-2} = 1$, 所以 $-1 \leq k \leq 1$, 即 $-1 \leq \tan \alpha \leq 1$. 因为 $0 \leq \alpha < \pi$, 所以 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4} \leq \alpha < \pi$, 故直线 l 的倾斜角的取值范围是 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$.



小妙招

由于直线 l 与线段 AB 有公共点, 而公共点是变化的, 为此, 作一个简图将问题直观化, 有利于问题的求解.

方法总结

(1) 解决直线的倾斜角与斜率问题, 常用数形结合的思想, 这样可以很直观地确定它们的变化规律. 从图形可以看出, 确定边界以及直线的旋转范围是解决此类问题的关键.

(2) 充分利用正切函数 $y = \tan x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上的图象是快速、准确研究倾斜角与斜率的变化范围问题的有效手段.



题型二 直线的斜率的应用

例3 (2025 河南周口阶段练习) 已知 $a > 0$, 平面内三点 $A(0, -a)$, $B(1, a^2)$, $C(3, 2a^3)$ 共线, 则 $a =$ _____.

答案 2

解析1 因为 $A(0, -a)$, $B(1, a^2)$, $C(3, 2a^3)$ 三点共线, 所以 $k_{AB} = a^2 + a$, $k_{AC} = \frac{2a^3 + a}{3}$. 又因为 $k_{AB} = k_{AC}$, 所以 $a^2 + a = \frac{2a^3 + a}{3}$, 整理得 $2a^3 - 3a^2 - 2a = 0$, 即 $a(2a + 1)(a - 2) = 0$. 又因为 $a > 0$, 所以 $a = 2$.

解析2 因为 $\overrightarrow{AB} = (1, a^2 + a)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 2a^3 + a)$, 且 A, B, C 三点共线, 所以 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$, 从而 $1 \cdot (2a^3 + a) - 3(a^2 + a) = 0$, 即 $a(2a + 1)(a - 2) = 0$. 又因为 $a > 0$, 所以 $a = 2$.

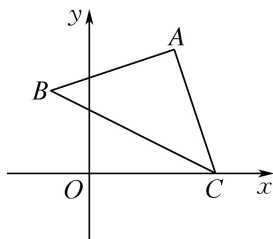
解后反思

已知三点共线求参数问题, 可利用任意两点连线的斜率都相等, 寻找关于参数的方程, 此时要注意应用斜率公式的前提条件——两点的横坐标不相等, 所以遇到含参问题, 常需分类讨论. 而应用向量平行的方法解决, 可以避免分类讨论.

例4 (2025 河南阶段练习) 已知实数 x, y 满足 $x - 3y + 7 = 0$, 且 $-1 \leq x \leq 2$, 则 $\frac{y}{x-3}$ 的最小值为 _____.

答案 -3

解析 $\frac{y}{x-3}$ 表示线段 $x - 3y + 7 = 0 (-1 \leq x \leq 2)$ 上的点 (x, y) 与点 $(3, 0)$ 的连线的斜率. 如图, 当点 (x, y) 在点 A 时, $\frac{y}{x-3}$ 取最小值, 此时 $A(2, 3)$, $k = \frac{3}{2-3} = -3$, 即 $\frac{y}{x-3}$ 的最小值为 -3.



解后反思

揭示代数式的几何意义, 从而将代数问题转化为几何问题来解决是有效求解代数问题的手段. 它可以化抽象为直观, 且快速、准确.

题型三 直线方程及其应用

例5 (2024 安徽期末) 已知直线 l 过点 $(1, 2)$.

(1) 若直线 l 在 y 轴上的截距 b 、在 x 轴上的截距 a 满足 $b = 3a$, 求直线 l 的方程;

(2) 若直线 l 与两坐标轴的正半轴分别交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 当 $\triangle OAB$ 的面积最小时, 求直线 l 的方程.

解析 (1) 当直线 l 不过原点 $(0, 0)$ 时, 设直线 l 为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{3a} = 1$, 将点 $(1, 2)$ 代入, 可得 $a = \frac{5}{3}$, 所以直线 l 的方程为 $3x + y - 5 = 0$; 当直线 l 过原点 $(0, 0)$ 时, 直线 l 的斜率为 $\frac{2-0}{1-0} = 2$, 所以直线 l 的方程为 $y - 2 = 2(x - 1)$, 即 $2x - y = 0$.

小分析

注意到 $\frac{y}{x-3}$ 表示点 (x, y) 与点 $(3, 0)$ 的连线的斜率, 为此, 利用它的几何意义来求解.

避坑区

若设直线方程时用到了它的斜率, 则需考虑斜率是否存在; 若设直线方程的截距式, 要考察截距是否为 0.



综上,直线 l 的方程为 $3x+y-5=0$ 或 $2x-y=0$.

(2) **解法 1(点斜式)** 易知直线 l 的斜率存在. 设直线 l 的方程为 $y-2=k(x-1)$ ($k < 0$), 所以 $A(1-\frac{2}{k}, 0)$, $B(0, 2-k)$, 所以 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times (1-\frac{2}{k}) \times (2-k) = \frac{1}{2} \times (4-k-\frac{4}{k}) \geq 4$, 当且仅当 $-k = -\frac{4}{k}$, 即 $k = -2$ 时, 等号成立, 所以直线 l 的方程为 $y-2 = -2(x-1)$, 即 $2x+y-4=0$.

解法 2(截距式) 易知直线 l 在 x 轴、 y 轴上均有截距, 且均不为 0. 设直线 $l: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$). 因为直线 l 过点 $(1, 2)$, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$, 从而 $1 \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}$, 即 $ab \geq 8$, 当且仅当 $\frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{1}{2}$, 即 $a=2, b=4$ 时, 等号成立, 此时 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}ab$ 取得最小值 4, 直线 l 的方程为 $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$, 即 $2x+y-4=0$.

例 6 (2025 天津河东阶段练习) 已知直线 l 被两条直线 $l_1: 2x+y+3=0$ 和 $l_2: 3x-5y+1=0$ 截得的线段的中点为 $P(\frac{2}{3}, -3)$, 则直线 l 的一般式方程为_____.

答案 $60x+17y+11=0$

解析 1 (设点法) 设 l 与 l_1 的交点为 A , l 与 l_2 的交点为 B . 因为点 A 在 $l_1: 2x+y+3=0$ 上, 所以设 $A(a, -2a-3)$. 因为 $P(\frac{2}{3}, -3)$ 是 AB 的中点, 所以 $B(\frac{4}{3}-a, -3+2a)$. 又点 B 在直线 $l_2: 3x-5y+1=0$ 上, 所以 $3(\frac{4}{3}-a) - 5(-3+2a) + 1 = 0$, 解得 $a = \frac{20}{13}$, 故 $A(\frac{20}{13}, -\frac{79}{13})$, 所以 $l: \frac{y+\frac{79}{13}}{-3+\frac{79}{13}} = \frac{x-\frac{20}{13}}{\frac{2}{3}-\frac{20}{13}}$, 整理得 $60x+17y+11=0$, 即为所求的直线方程.

解析 2 (设线法) 设 l 与 l_1 的交点为 A , l 与 l_2 的交点为 B . 若直线 l 垂直于 x 轴, 则它与 l_1, l_2 的交点分别为 $A(\frac{2}{3}, -\frac{13}{3}), B(\frac{2}{3}, \frac{3}{5})$, 此时 P 不是 AB 的中点, 故不合题意, 所以设直线 $l: y+3=k(x-\frac{2}{3})$, 由 $\begin{cases} 2x+y+3=0, \\ y+3=k(x-\frac{2}{3}) \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\frac{2k}{3(k+2)}, \\ y=\frac{-13k-18}{3(k+2)}, \end{cases}$ 故 $A(\frac{2k}{3(k+2)}, \frac{-13k-18}{3(k+2)})$, 同理 $B(\frac{10k+48}{3(5k-3)}, \frac{3k+9}{5k-3})$. 因为 $P(\frac{2}{3}, -3)$ 是 AB 的中点, 所以 $\begin{cases} \frac{4}{3} = \frac{2k}{3(k+2)} + \frac{10k+48}{3(5k-3)}, \\ -6 = \frac{-13k-18}{3(k+2)} + \frac{3k+9}{5k-3}, \end{cases}$ 解得 $k = -\frac{60}{17}$, 故直线 l 的方程为 $60x+17y+11=0$.

避坑区

设点法与设线法的区别: 设线法需要将交坐标用直线的特征量来加以表示, 为此, 就需要通过解方程组来达到这一目的; 而设点法无需求交点, 只需找到交点所满足的条件即可.

方法总结

1. 求直线方程的一种重要方法就是待定系数法. 运用此方法, 要注意各种形式的方程的适用条件, 选择适当的直线方程的形式至关重要.

2. 确定直线通常有两种方法: ①两点确定一条直线; ②一个点与一个方向确定一条直线. 为此, 在求直线方程时, 就有设点法与设线法两种方法, 解题中, 要根据条件进行有效的选择, 选择不当, 就会导致解题过程过于烦琐.



题型四 直线的位置关系的判断及应用

例7 (1) (2025 广西玉林期中) 已知直线 $l_1: x+my+2=0$ 和直线 $l_2: mx+(2m+3)y-2=0$ 平行, 则 m 的值为 ()

- A. 3 B. 3 或 -1 C. -1 D. -3

(2) (多选题) (2025 河南阶段练习) 若三条直线 $l_1: 2x-y+1=0$, $l_2: x+y-1=0$, $l_3: 2x+ay+a-2=0$ 不能围成一个三角形, 则实数 a 的值可以为 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

答案 (1) A (2) ACD

解析 (1) **解法1** 因为 $l_1 \parallel l_2$, 所以 $\begin{cases} 1 \times (2m+3) - m \times m = 0, \\ 1 \times (-2) - 2m \neq 0, \end{cases}$ 解得 $m=3$.

解法2 因为 $l_1 \parallel l_2$, 所以 $1 \times (2m+3) - m \times m = 0$, 解得 $m=3$ 或 -1 . 当 $m=3$ 时, $l_1: x+3y+2=0$, $l_2: x+3y-\frac{2}{3}=0$, $l_1 \parallel l_2$, 符合题意; 当 $m=-1$ 时, $l_1: x-y+2=0$, $l_2: x-y+2=0$, l_1 与 l_2 重合, 不符合题意.

解法3 当 $m=0$ 时, $l_1: x=-2$, $l_2: y=\frac{2}{3}$, 不合题意; 当 $2m+3=0$, 即 $m=-\frac{3}{2}$ 时, $l_1: x-\frac{3}{2}y+2=0$, $l_2: x=-\frac{4}{3}$, 不合题意; 当 $m \neq 0$ 且 $m \neq -\frac{3}{2}$ 时, $l_1: y=-\frac{1}{m}x-\frac{2}{m}$, $l_2: y=-\frac{m}{2m+3}x+\frac{2}{2m+3}$, 因为 $l_1 \parallel l_2$, 所以 $\begin{cases} -\frac{1}{m} = -\frac{m}{2m+3}, \\ -\frac{2}{m} \neq \frac{2}{2m+3}, \end{cases}$ 解得 $m=3$.

(2) 当三条直线交于一点时, 由 $\begin{cases} 2x-y+1=0, \\ x+y-1=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=0, \\ y=1, \end{cases}$ 故 l_1, l_2 的交点 A 的坐标为 $(0, 1)$, 由点 A 在 l_3 上可得 $2 \times 0 + a + a - 2 = 0$, 解得 $a=1$. 当三条直线 l_1, l_2, l_3 有两条直线平行时, 因为 l_1 与 l_2 相交, 所以 $l_1 \parallel l_3$ 或 $l_2 \parallel l_3$. 若 $l_1 \parallel l_3$, 则 $\frac{2}{-1} = \frac{a}{-1} \neq \frac{a-2}{1}$, 解得 $a=-1$; 若 $l_2 \parallel l_3$, $\frac{2}{1} = \frac{a}{1} \neq \frac{a-2}{-1}$, 解得 $a=2$. 综上, 当 $a=2$ 或 $a=-1$ 或 $a=1$ 时, 这三条直线不能围成三角形.

例8 (多选题) (2024 江苏专题练习) 已知 $m \in \mathbf{R}$, 若过定点 A 的动直线 $l_1: x-my+m-2=0$ 和过定点 B 的动直线 $l_2: mx+y+2m-4=0$ 交于点 P (P 与 A, B 不重合), 则以下说法正确的是 ()

- A. 点 A 的坐标为 $(2, 1)$ B. $PA \perp PB$
C. $PA^2 + PB^2 = 25$ D. $2PA + PB$ 的最大值为 5

答案 ABC

解析 因为 $l_1: x-my+m-2=0$ 可以转化为 $m(1-y)+x-2=0$, 所以直线恒过定点 $A(2, 1)$, 故 A 正确; 又因为 $l_2: mx+y+2m-4=0$, 即 $y-4=-m(x+2)$, 所以恒过定点 $B(-2, 4)$, 由 $l_1: x-my+m-2=0$ 和 $l_2: mx+y+2m-4=0$, 满足 $1 \times m + (-m) \times 1 = 0$, 所以 $l_1 \perp l_2$, 可得 $PA \perp PB$, 故 B 正确; $PA^2 + PB^2 = AB^2 = (2+2)^2 + (1-4)^2 = 25$, 故 C 正确;

解法1 因为 $PA \perp PB$, 设 $\angle PAB = \theta$, θ 为锐角, 则 $PA = 5 \cos \theta$, $PB = 5 \sin \theta$, 所以 $2PA + PB = 5(2 \cos \theta + \sin \theta) = 5\sqrt{5} \sin(\theta + \varphi)$, 其中 $\tan \varphi = 2$, 所以当 $\sin(\theta + \varphi) = 1$ 时, $2PA + PB$ 取最大值 $5\sqrt{5}$, 故 D 错误.

小妙招

三条直线不能围成三角形, 有两种情形: 一是三条直线交于一点; 二是三条直线中至少有两条直线平行. 为此, 进行分类讨论即可.

小点拨

注意到 $\text{Rt} \triangle ABP$ 的斜边 $AB=5$ 为定值, 而要研究两条直角边的代数和的最大值, 为此, 有两种处理方法: 一是以一个锐角为变量, 将两边表示为该锐角的三角函数形式来求; 二是将 $2PA + PB$ 进行平方, 然后利用基本不等式构造 $PA^2 + PB^2$ 进行求解.



解法2 因为 $(2PA+PB)^2 = 4PA^2 + PB^2 + 4PA \cdot PB \leq 4PA^2 + PB^2 + (PA^2 + 4PB^2) = 125$, 所以 $2PA+PB \leq 5\sqrt{5}$, 当且仅当 $PA=2\sqrt{5}, PB=\sqrt{5}$ 时, 取等号.

方法总结

动点、动直线问题的解决办法

1. 在研究动直线问题时, 要有效地揭示它的几何性质, 尤其是它过定点的性质, 这本质就是一种化“动”为“静”的方法.

2. 在研究动点问题时, 要有效地揭示它的轨迹, 从而将动点转化为静止的轨迹或轨迹方程, 从而达到化“动”为“静”的效果.

例9 (2025 广东东莞阶段练习) 若直线 $l_1: x+2y-4=0$ 与直线 $l_2: kx-y+2k+1=0$ 的交点位于第一象限, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$ B. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$
C. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{6}, +\infty)$

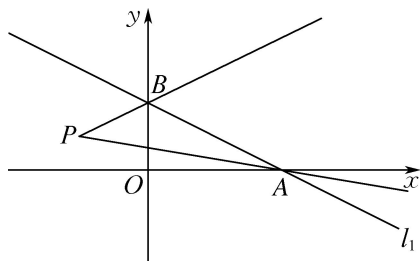
答案 A

解析1 由题意易知 $k \neq -\frac{1}{2}$, 联立 $\begin{cases} x+2y-4=0, \\ kx-y+2k+1=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{2-4k}{2k+1}, \\ y=\frac{6k+1}{2k+1}, \end{cases}$ 即直线

$l_1: x+2y-4=0$ 与直线 $l_2: kx-y+2k+1=0$ 的交点为 $(\frac{2-4k}{2k+1}, \frac{6k+1}{2k+1})$, 由题意可得

$$\begin{cases} \frac{2-4k}{2k+1} > 0, \\ \frac{6k+1}{2k+1} > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } -\frac{1}{6} < k < \frac{1}{2}, \text{ 即实数 } k \text{ 的取值范围是 } (-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}).$$

解析2 设直线 l_1 分别与 x 轴、 y 轴交于 A , B 两点, 则 $A(4,0), B(0,2)$, 由直线 l_2 得 $k(x+2)-y+1=0$, 则 $\begin{cases} x+2=0, \\ -y+1=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-2, \\ y=1, \end{cases}$ 所以直线 l_2 过定点 $P(-2,1)$. 又 $k_{AP} = \frac{1}{-2-4} = -\frac{1}{6}, k_{BP} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$, 所以由图可知, 当 l_1 与 l_2



的交点在第一象限时, $-\frac{1}{6} < k < \frac{1}{2}$, 即实数 k 的取值范围是 $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$.

题型五 平面距离及其應用

例10 (2024 浙江绍兴期末) 原点到直线 $l: \lambda x + y - \lambda + 1 = 0 (\lambda \in \mathbf{R})$ 的距离的最大值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ C. $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ D. $\sqrt{2}$

答案 D

解析1 设原点到直线 l 的距离为 d , 则 $d = \frac{|-\lambda+1|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \sqrt{\frac{\lambda^2-2\lambda+1}{\lambda^2+1}}$



$$\sqrt{1-\frac{2\lambda}{\lambda^2+1}}, \text{显然当 } \lambda < 0 \text{ 时, } d \text{ 有最大值, 此时 } -\frac{2\lambda}{\lambda^2+1} = \frac{2}{(-\lambda)+(-\frac{1}{\lambda})}. \text{ 因为 } (-\lambda)+(-\frac{1}{\lambda}) \geq 2\sqrt{(-\lambda) \cdot (-\frac{1}{\lambda})} = 2, \text{ 当且仅当 } \lambda = -1 \text{ 时, 等号成立, 所以 } \frac{2}{(-\lambda)+(-\frac{1}{\lambda})} \leq \frac{2}{2} = 1, \text{ 所以 } d \leq \sqrt{2}, \text{ 即 } d_{\max} = \sqrt{2}.$$

解析 2 由直线 l 得 $\lambda(x-1)+y+1=0$, 所以直线 l 过定点 $P(1, -1)$, 当直线 $l \perp OP$ 时, 原点到直线 l 的距离最大, 即为 $OP = \sqrt{2}$.

方法总结

代数法: 根据点到直线的距离公式, 将所求距离表示为 λ 的函数形式, 通过函数关系来求最大值.

几何法: 注意到直线 l 为动直线, 为此, 考虑它是否过定点 P , 若过定点, 则由几何关系可知, 当直线 $l \perp OP$ 时, 距离最大.

例 11 (多选题) (2025 云南玉溪期中) 已知直线 $x-2y+3=0$ 和直线 $x+y-3=0$ 的交点为 P , 则过点 P 且与点 $A(2, 3)$ 和 $B(4, -5)$ 距离相等的直线方程为 ()

A. $4x-y+6=0$ B. $4x+y-6=0$ C. $3x+2y+6=0$ D. $3x+2y-7=0$

答案 BD

解析 1 由 $\begin{cases} x-2y+3=0, \\ x+y-3=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases}$ 即 $P(1, 2)$, 直线 AB 的斜率为 $k_{AB} = \frac{3+5}{2-4} = -4$, 线段 AB 的中点坐标为 $(3, -1)$. ①若所求直线与直线 AB 平行, 则所求直线的方程为 $y-2=-4(x-1)$, 即 $4x+y-6=0$; ②若所求直线过 AB 的中点, 则所求直线的斜率为 $\frac{2+1}{1-3} = -\frac{3}{2}$, 故所求直线方程为 $y-2=-\frac{3}{2}(x-1)$, 即 $3x+2y-7=0$.

解析 2 由 $\begin{cases} x-2y+3=0, \\ x+y-3=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases}$ 即 $P(1, 2)$. 若直线 l 垂直于 x 轴, 则此时 $l: x=1$, 点 $A(2, 3)$ 到直线 l 的距离为 $d_1=1$, 点 $B(4, -5)$ 到直线 l 的距离 $d_2=3$, 不合题意, 故设直线 $l: y-2=k(x-1)$, 即 $kx-y-k+2=0$. 因为 A, B 两点到直线 l 的距离相等, 所以 $\frac{|k-1|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{|3k+7|}{\sqrt{k^2+1}}$, 解得 $k=-4$ 或 $k=-\frac{3}{2}$, 所以直线 l 的方程为 $4x+y-6=0$ 或 $3x+2y-7=0$.

解析 3 因为直线 l 过直线 $x-2y+3=0$ 和直线 $x+y-3=0$ 的交点 P , 所以设 $l: x-2y+3+\lambda(x+y-3)=0$, 即 $(\lambda+1)x+(\lambda-2)y+3-3\lambda=0$. 因为 A, B 两点到直线 l 的距离相等, 所以 $\frac{|2(\lambda+1)+3(\lambda-2)+3-3\lambda|}{\sqrt{(\lambda+1)^2+(\lambda-2)^2}} = \frac{|4(\lambda+1)-5(\lambda-2)+3-3\lambda|}{\sqrt{(\lambda+1)^2+(\lambda-2)^2}}$, 即 $|2\lambda-1|=|4\lambda-17|$, 解得 $\lambda=3$ 或 $\lambda=8$, 所以直线 l 的方程为 $4x+y-6=0$ 或 $3x+2y-7=0$.

解后反思

1. 解析几何是用代数的方法研究几何问题, 在解题中, 不仅要从方程的角度来研究问题, 同时, 更要充分利用好几何图形的性质, 从而达到有效地简化问题的目的.

2. 利用过两条直线交点的直线系方程有两种好处: 一是可以避免求直线的交点; 二是避免在应用待定系数法时对直线的斜率是否存在进行分类讨论.

避坑区

注意到平面内, 过一点 P 且与 A, B 两点距离相等的直线 l 具有两种可能的位置关系, 一是直线 l 经过 A, B 的中点, 二是直线 l 与 AB 平行.