

1. B 2. A 3. C 4. D 5. B 6. C

7. A 提示:过点 A 作 $AC \perp x$ 轴于点 C,过点 B 作

$BD \perp x$ 轴于点 D,则 $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \times |-1| = \frac{1}{2}$,

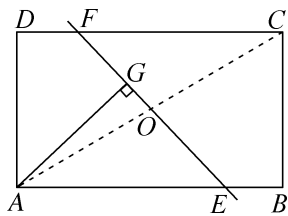
$S_{\triangle OBD} = \frac{1}{2} \times |4| = 2$. 因为 $\angle ACO = \angle ODB = 90^\circ$, 所

以 $\angle OBD + \angle BOD = 90^\circ$. 因为 $OA \perp OB$, 所以

$\angle AOC + \angle BOD = 90^\circ$, 所以 $\angle AOC = \angle OBD$, 所以

$\triangle AOC \sim \triangle OBD$, 所以 $\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle OBD}} = \left(\frac{OA}{OB}\right)^2$, 即 $\frac{\frac{1}{2}}{2} = \left(\frac{OA}{OB}\right)^2$, 所以 $\frac{OA}{OB} = \frac{1}{2}$.

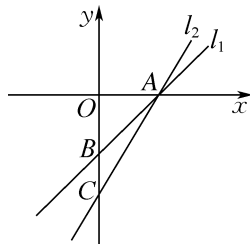
8. D 提示:如图,连接 AC, 交 EF 于点 O. 因为四边形 ABCD 是矩形, 所以 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle EAO = \angle FCO$, $\angle AEO = \angle CFO$. 由题意可知, $AE = CF$, 所以 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ (ASA), 所以 $OA = OC$, 即 O 必为 AC 的中点. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, 由勾股定理, 得 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2$, 所以 $OA = OC = \frac{1}{2}AC = 1$. 因为 $AG \perp EF$, 所以 $\angle AGO = 90^\circ$, 所以点 G 在以 AO 为直径的圆上运动. 当点 G 与点 O 重合时, AG 的长取得最大值, 最大值为 $OA = 1$.



【解后反思】本题中,欲求线段 AG 的最大值,关键是确定动点 G 的运动路径,“直角对直径”是最佳的联想方向,而根据题中条件可判断,直线 EF 必过矩形对称中心这一定点,从而可知,直径就是 AO. 故 AG 的最大值就是直径之长.

9. x^5 10. 4 11. $\frac{3}{8}$ 12. 62°

13. $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ 提示:直线 l_1 和直线 l_2 如图所示. 易得点 $A(1, 0)$, $B(0, -1)$, 所以 $OA = OB = 1$, 即 $\angle OAB = \angle OBA = 45^\circ$. 因为 $\angle BAC = 15^\circ$, 所以 $\angle OAC = \angle OAB + \angle BAC = 60^\circ$. 所以 $OC = OA \cdot \tan \angle OAC = \sqrt{3}$, 则点 $C(0, -\sqrt{3})$. 由待定系数法, 得直线 l_2 的函数表达式为 $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$.



14. 8π 提示:过点 C 作 $CE \perp AB$ 于点 E. 由正六边形的性质, 得 $\angle AOB = 60^\circ$, $OA = OB$, 所以 $\triangle AOB$ 为等边三角形. 因为圆心 C 是 $\triangle ABO$ 的内心, 所以 $\angle CAO = \angle CAE = \angle CBE = 30^\circ$, 所以 $\angle ACB = 120^\circ$. 因为 $AB = 2\sqrt{3}$, 所以 $AE = BE = \sqrt{3}$. 所以 $AC = \frac{AE}{\cos \angle CAE} = 2$, 所以 $\widehat{AB}$ 的长为 $\frac{120 \times 2 \times \pi}{180} = \frac{4\pi}{3}$, 所以花窗的周长为 $\frac{4\pi}{3} \times 6 = 8\pi$.

15. $-\frac{3}{5}$ 提示:解法 1 由 B, D 两点坐标可知, 抛物线的对称轴为直线 $x = 2$, 从而得到 C 是抛物线的顶点, 所以函数表达式可以写成 $y = a(x - 2)^2 + n$. 将 A, B 两点坐标分别代入, 得 $m = 4a + n$, $-m = a + n$, 解得 $m = \frac{3}{2}a$, $n = -\frac{5}{2}a$, 所以 $\frac{m}{n} = -\frac{3}{5}$.

解法 2 将点 $A(0, m)$, $B(1, -m)$, $D(3, -m)$ 代入 $y =$

$$ax^2 + bx + c \ (a \neq 0), \text{ 得 } \begin{cases} c = m, \\ a + b + c = -m, \\ 9a + 3b + c = -m, \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} a = \frac{2}{3}m, \\ b = -\frac{8}{3}m, \\ c = m. \end{cases} \text{ 所以 } y = \frac{2}{3}mx^2 - \frac{8}{3}mx + m. \text{ 将点 } C(2,$$

$n)$ 代入 $y = \frac{2}{3}mx^2 - \frac{8}{3}mx + m$, 得 $n = -\frac{5}{3}m$, 所以

$$\frac{m}{n} = -\frac{3}{5}.$$

16. $\frac{10}{3}$ 提示:在 $Rt\triangle ABC$ 中, 由勾股定理, 得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5\sqrt{5}$. 设 $AD = x$, 则 $AE = \sqrt{5}x$. 由折叠的性质, 得 $DF = AD = x$, $\angle ADE = \angle FDE$. 设 EF 与 AC 相交于点 M, 过点 E 作 $EH \perp AC$ 于点 H, 则 $EH \parallel BC$. 所以 $\triangle AHE \sim \triangle ACB$, 所以 $\frac{EH}{BC} = \frac{AH}{AC} = \frac{AE}{AB}$. 即 $\frac{EH}{5} = \frac{AH}{10} = \frac{\sqrt{5}x}{5\sqrt{5}}$, 所以 $EH = x$, $AH = 2x$, 所以 $DH = AH - AD = x = EH = DF$. 所以 $\triangle EHD$ 是等腰

直角三角形, 所以 $\angle HDE = \angle HED = 45^\circ$, 所以 $\angle EDF = \angle ADE = 180^\circ - \angle HDE = 135^\circ$, 所以 $\angle FDM = \angle EDF - \angle HDE = 90^\circ$. 在 $\triangle FDM$ 和

$$\triangle EHM \text{ 中, } \begin{cases} \angle FDM = \angle EHM, \\ \angle DMF = \angle HME, \text{ 所以 } \triangle FDM \cong \\ DF = HE, \end{cases}$$

$\triangle EHM$ (AAS), 所以 $DM = HM = \frac{1}{2}x$, 所以 $CM =$

$AC - AD - DM = 10 - \frac{3}{2}x$. 因为 $S_{\triangle CEF} = 2S_{\triangle BEC}$, 即

$S_{\triangle CME} + S_{\triangle CMF} = 2(S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AEC})$, 所以 $\frac{1}{2}CM \cdot EH +$

$\frac{1}{2}CM \cdot DF = 2\left(\frac{1}{2}AC \cdot BC - \frac{1}{2}AC \cdot EH\right)$, 即

$\left(10 - \frac{3}{2}x\right) \cdot x = 2(25 - 5x)$, 解得 $x_1 = \frac{10}{3}$, $x_2 = 10$ (舍

去), 即 $AD = \frac{10}{3}$.

【解后反思】“求啥设啥”是有关几何计算问题的通法. 在本题中, 欲求线段 AD 之长, 即设其为 x , 进而用含 x 的代数式表示其他线段的长度, 最后根据已知条件或勾股定理等, 列得方程而求之.

17. 解: 原式 $= 4 + 1 - 3 = 2$.

18. 解: $\begin{cases} 2x + y = 7 & \text{①,} \\ 2x - 3y = 3 & \text{②,} \end{cases}$ ① - ②, 得 $4y = 4$, 解得

$y = 1$. 将 $y = 1$ 代入①, 得 $x = 3$. 所以原方程组

的解是 $\begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$

19. 解: 原式 $= \left(\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-2}{x-2}\right) \div \frac{x(2x-1)}{(x+2)(x-2)} =$

$\frac{2x-1}{x-2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{x(2x-1)} = \frac{x+2}{x}$. 当 $x = -3$

时, 原式 $= \frac{-3+2}{-3} = \frac{1}{3}$.

20. (1) 证明: 由作图可知, $BD = CD$. 在 $\triangle ABD$

和 $\triangle ACD$ 中, 因为 $\begin{cases} AB = AC, \\ BD = CD, \text{ 所以 } \triangle ABD \cong \\ AD = AD, \end{cases}$

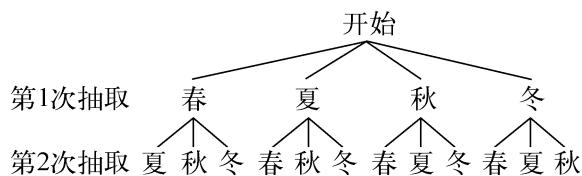
$\triangle ACD$.

(2) 解: 因为 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, $\angle BDC = 120^\circ$, 所以 $\angle BDE = \angle CDE = 60^\circ$. 又因为 $BD = CD$, 所以 $AD \perp BC$, $BE = CE$. 在 $\text{Rt}\triangle BED$ 中, $BE = BD \cdot \sin \angle BDE = \sqrt{3}$,

所以 $BC = 2BE = 2\sqrt{3}$.

21. 解: (1) $\frac{1}{4}$

(2) 画树状图如下:



由图可知, 共有 12 种等可能的结果, 其中抽取的书签 1 张为“春”, 1 张为“秋”的结果有 2 种, 所以 P (抽取的书签恰好 1 张为“春”, 1 张为“秋”) $= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

22. 解: (1) D 组人数为 $\frac{9}{15\%} - 6 - 18 - 9 - 12 =$

15. 补全的条形统计图略.

(2) 72

(3) $800 \times \frac{18}{60} = 240$ (人).

答: 本校七年级 800 名学生中选择项目 B (乒乓球) 的人数约为 240.

23. 解: (1) 如图 1, 过点 C 作 $CE \perp AD$ 于点 E . 因为 $AB \perp BC$, $AD \parallel BC$, 所以 $AB \perp AD$, 所以 $\angle B = \angle A = \angle AEC = 90^\circ$, 所以四边形 $ABCE$ 为矩形, 所以 $AE = BC = 20$ cm, $CE = AB = 10$ cm, 所以 $DE = AD - AE = 30$ cm. 在 $\text{Rt}\triangle CED$ 中, 由勾股定理, 得 $CD = \sqrt{CE^2 + DE^2} = 10\sqrt{10}$ cm.

答: 当活动杆 AD 处于水平状态时, 可伸缩支撑杆 CD 的长度为 $10\sqrt{10}$ cm.

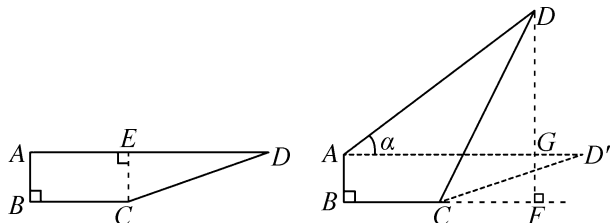


图 1

图 2

(2) 如图 2, 过点 D 作 $DF \perp BC$, 交 BC 的延长线于点 F , 交 AD' 于点 G . 同(1)可证, 四边形 $ABFG$ 为矩形, 所以 $AG = BF$, $FG =$

$AB=10$ cm. 在 $\text{Rt}\triangle AGD$ 中, 由 $\tan \alpha = \frac{DG}{AG} = \frac{3}{4}$, 得 $DG = \frac{3}{4}AG$. 由勾股定理, 得 $AD = \sqrt{AG^2 + DG^2} = \frac{5}{4}AG = 50$ cm, 所以 $AG = 40$ cm, $DG = 30$ cm. 所以 $BF = AG = 40$ cm, 所以 $CF = BF - BC = 20$ cm, $DF = DG + FG = 40$ cm. 在 $\text{Rt}\triangle CFD$ 中, 由勾股定理, 得 $CD = \sqrt{CF^2 + DF^2} = 20\sqrt{5}$ cm.

答:此时可伸缩支撑杆 CD 的长度为 $20\sqrt{5}$ cm.

24. 解: (1) 因为点 $A(-2, 0)$, $C(6, 0)$, 所以 $BC = AC = 8$. 因为 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以点 $B(6, 8)$. 设直线 AB 的函数表达式为 $y = ax + b (a \neq 0)$. 将点 $A(-2, 0)$, $B(6, 8)$ 代入, 得
$$\begin{cases} -2a + b = 0, \\ 6a + b = 8, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = 1, \\ b = 2. \end{cases}$$
 所以直线 AB 的函数表达式为 $y = x + 2$. 令 $y = 4$, 则 $x = 2$, 即 $m = 2$, 所以点 $D(2, 4)$, 所以 $k = 8$.

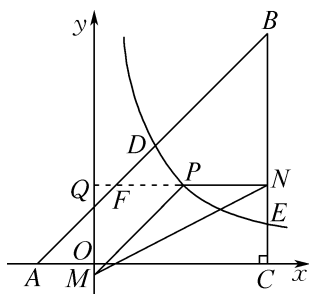
(2) 如图, 延长 NP 交 y 轴于点 Q , 设直线 AB 交 y 轴于点 F . 因为 $AC=BC$, $\angle ACB=90^\circ$, 所以 $\angle BAC=45^\circ$. 因为 $PM\parallel AB$, 所以 $\angle PMQ=\angle AFO=90^\circ-\angle BAC=45^\circ$. 因为 $PN\parallel x$ 轴, 所以 $PN\perp y$ 轴, 所以 $\angle MPQ=45^\circ=\angle PMQ$, 所以 $PQ=MQ$. 设点 P 的坐标为 $\left(t, \frac{8}{t}\right)$ ($2<t<6$), 则 $PQ=t$, $PN=6-$

t . 所以 $MQ=PQ=t$. 所以 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}PN \cdot$

$$MQ = \frac{1}{2}(6-t)t = -\frac{1}{2}(t-3)^2 + \frac{9}{2}.$$

因为 $-\frac{1}{2} < 0$, 所以当 $t=3$ 时, $S_{\triangle PMN}$ 有最大值,

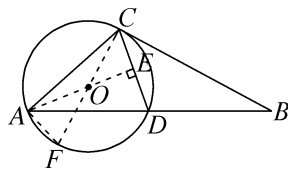
最大值为 $\frac{9}{2}$,此时点 $P(3, \frac{8}{3})$.



25. 解: (1) 因为 $\angle BAC = \angle BCD$, $\angle B = \angle B$, 所以 $\triangle ABC \sim \triangle CBD$. 所以 $\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{CB}$, 即 $BC^2 = AB \cdot BD$. 因为 $AB = 4\sqrt{2}$, D 为 AB 的中点, 所以 $BD = AD = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{2}$, 所以 $BC^2 = AB \cdot BD = 16$, 所以 $BC = 4$ (负值已舍).

(2) 如图,过点 A 作 $AE \perp CD$ 于点 E ,连接 CO ,并延长交 $\odot O$ 于点 F ,连接 AF . 在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中,由 $\cos \angle ADC = \frac{DE}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{4}$,得

$DE = \frac{\sqrt{2}}{4} AD = 1$. 由勾股定理, 得 $AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{7}$. 由(1)可知, $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, 所以 $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{CB} = \sqrt{2}$. 设 $CD = x$, 则 $AC = \sqrt{2}x$, $CE = CD - DE = x - 1$. 在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中, 由勾股定理, 得 $AC^2 = CE^2 + AE^2$, 即 $(\sqrt{2}x)^2 = (x - 1)^2 + (\sqrt{7})^2$, 解得 $x_1 = 2, x_2 = -4$ (舍去). 所以 $CD = 2, AC = 2\sqrt{2}$. 因为 CF 为 $\odot O$ 的直径, 所以 $\angle CAF = 90^\circ$. 由同弧所对的圆周角相等, 得 $\angle AFC = \angle ADC$. 所以 $\sin \angle AFC = \sin \angle ADC$, 所以 $\frac{AC}{CF} = \frac{AE}{AD}$, 即 $\frac{2\sqrt{2}}{CF} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. 所以 $CF = \frac{8\sqrt{7}}{7}$, 所以 $\odot O$ 的半径为 $\frac{4\sqrt{7}}{7}$.



26. (1) 90 60

(2) ① $\frac{5}{6}$ 提示: 由题意, 得 D1001 次列车从 A 站到 C 站的行驶时间为 $90+60=150(\text{min})$, G1002 次列车从 A 站到 C 站的行驶时间为 $60 \times 2 + (30-25) = 125(\text{min})$. 由 $150v_1 = 125v_2$, 得 $\frac{v_1}{v_2} = \frac{5}{6}$.

②解: 因为 $v_1 = 4 \text{ km/min}$, $\frac{v_1}{v_2} = \frac{5}{6}$, 所以 $v_2 =$

4.8 km/min. 所以 A 站与 B 站之间的路程为 $4 \times 90 = 360$ (km), G1002 次列车从 A 站到 B 站的行驶时间为 $360 \div 4.8 = 75$ (min). 所以当 $t = 25 + 75 = 100$ 时, G1002 次列车经过 B 站. 由题意可知, 当 $90 \leq t \leq 110$ 时, D1001 次列车在 B 站停车. 所以当 G1002 次列车经过 B 站时, D1001 次列车正在 B 站停车.

分情况讨论: 当 $25 \leq t < 90$ 时, $d_1 > d_2$, 所以 $|d_1 - d_2| = d_1 - d_2 = 4t - 4.8(t - 25) = 60$, 解得 $t = 75$; 当 $90 \leq t \leq 100$ 时, $d_1 \geq d_2$, 所以 $|d_1 - d_2| = d_1 - d_2 = 360 - 4.8(t - 25) = 60$, 解得 $t = 87.5$ (舍去); 当 $100 < t \leq 110$ 时, $d_1 < d_2$, 所以 $|d_1 - d_2| = d_2 - d_1 = 4.8(t - 25) - 360 = 60$, 解得 $t = 112.5$ (舍去); 当 $110 < t \leq 150$ 时, $d_1 < d_2$, 所以 $|d_1 - d_2| = d_2 - d_1 = 4.8(t - 25) - [360 + 4(t - 110)] = 60$, 解得 $t = 125$.

综上所述, 当 t 的值为 75 或 125 时, $|d_1 - d_2| = 60$.

27. 解: (1) 将点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$, 得 $\begin{cases} 1 - b + c = 0, \\ 9 + 3b + c = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b = -2, \\ c = -3. \end{cases}$ 所以

图像 C_1 对应的函数表达式为 $y = x^2 - 2x - 3$.

(2) 设图像 C_2 对应的函数表达式为 $y = a(x+1)(x-3)$ ($a < 0$), 将点 $C(0, 6)$ 代入, 得 $-3a = 6$, 解得 $a = -2$. 所以图像 C_2 对应的函数表达式为 $y = -2(x+1)(x-3)$. 易知图像 C_1 , C_2 的对称轴均为直线 $x = \frac{-1+3}{2} = 1$, 如图 1, 设直线 $x=1$ 交直线 l 于点 H . 由二次函数的对称性, 得 $QH = PH$, $NH = MH$. 所以 $NH - QH = MH - PH$, 即 $QN = MP$. 因为 $PH + QH = PQ = MP + QN$, 所以 $PH = MP$. 设 $PH = t$ ($0 < t < 2$), 则点 P 的横坐标为 $t+1$, 点 M 的横坐标为 $2t+1$. 将 $x = t+1$ 代入 $y = -2(x+1)(x-3)$, 得 $y_P = -2(t+2)(t-2)$, 将 $x = 2t+1$ 代入 $y = (x+1)(x-3)$, 得 $y_M = (2t+2)(2t-2)$. 因为 $y_P = y_M$, 所以 $-2(t+2)(t-2) = (2t+2)(2t-2)$, 解得 $t_1 = \sqrt{2}$, $t_2 = -\sqrt{2}$ (舍去). 所以点 P 的坐标为 $(\sqrt{2}+1, 4)$.

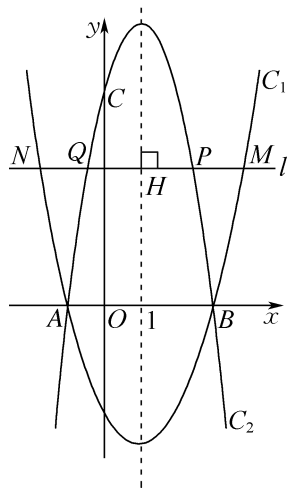


图 1

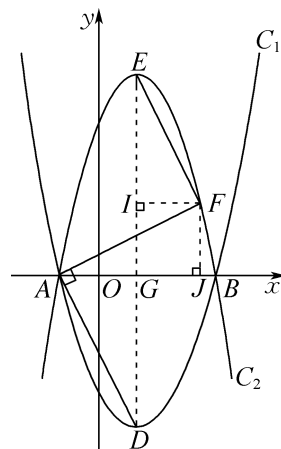


图 2

(3) 如图 2, 连接 DE , 交 x 轴于点 G , 分别过点 F 作 $FI \perp DE$ 于点 I , $FJ \perp x$ 轴于点 J . 易证四边形 $IGJF$ 为矩形, 所以 $IF = GJ$, $IG = FJ$. 设图像 C_2 对应的函数表达式为 $y = a(x+1)(x-3)$ ($a < 0$). 将 $x=1$ 分别代入 $y = x^2 - 2x - 3$, $y = a(x+1)(x-3)$ ($a < 0$), 得 $y_D = -4$, $y_E = -4a$, 所以点 $D(1, -4)$, $E(1, -4a)$, 所以 $DG = 4$, $AG = 2$, $EG = -4a$. 所以在 $\text{Rt} \triangle AGD$ 中, $\tan \angle ADG = \frac{AG}{DG} = \frac{1}{2}$. 因为 $AF \perp AD$, 所以 $\angle FAB + \angle DAG = 90^\circ$. 又因为 $\angle DAG + \angle ADG = 90^\circ$, 所以 $\angle ADG = \angle FAB$. 所以 $\tan \angle FAB = \tan \angle ADG$, 即 $\frac{FJ}{AJ} = \frac{1}{2}$. 设 $GJ = m$ ($0 < m < 2$), 则 $FI = m$, $OJ = 1 + m$, $AJ = 2 + m$. 所以 $FJ = \frac{2+m}{2}$, 所以点 $F(1+m, \frac{2+m}{2})$. 因为点 F 在抛物线 C_2 上, 所以 $a(1+m+1)(1+m-3) = \frac{2+m}{2}$, 即 $a(m+2)(m-2) = \frac{2+m}{2}$. 因为 $m+2 \neq 0$, 所以 $a(m-2) = \frac{1}{2}$. 因为 $EF \parallel AD$, 所以 $\angle FEI = \angle ADG$. 所以 $\tan \angle FEI = \tan \angle ADG$, 即 $\frac{FI}{EI} = \frac{1}{2}$, 所以

$EI=2m$. 又因为 $EG=EI+IG$, 所以 $2m+\frac{2+m}{2}=-4a$, 所以 $a=-\frac{2+5m}{8}$. 所以 $-\frac{2+5m}{8}(m-2)=\frac{1}{2}$, 解得 $m_1=0$ (舍去), $m_2=\frac{8}{5}$, 所以 $a=-\frac{5}{4}$. 所以图像 C_2 对应的函数表达式为 $y=-\frac{5}{4}(x+1)(x-3)=-\frac{5}{4}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{15}{4}$.

【解后反思】本题是二次函数与平面几何的综合题, 前两问考查了二次函数与二次方程之间的关系, 即二次函数的表达式可用交点式表示为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$, 其中 x_1, x_2 表示抛物线与 x 轴交点的横坐标; 第(3)问考查了坐标几何, 关键是通过三角函数(或相似三角形)用一个参数表示抛物线的各点坐标, 再结合已知条件, 列得方程, 解之即可.

B10* 无锡市 2024 年初中学业水平考试

1. A 2. D 3. A 4. C 5. C 6. B 7. A 8. B

9. C 提示: 延长 BC , 过点 E 作 $EH \perp BC$ 于点 H . 因为四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $BC=CD$, $AB \parallel CD$, 所以 $\angle DCH = \angle ABC = 60^\circ$. 设 $BC=CD=x$. 因为 E 是 CD 的中点, 所以 $CE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}x$. 因为 $EH \perp BH$, 所以 $\angle BHE = 90^\circ$. 在 $Rt\triangle CHE$ 中, 因为 $\sin \angle ECH = \frac{EH}{CE}$, 所以 $EH = CE \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}x$. 因为 $\cos \angle ECH = \frac{CH}{CE}$, 所以 $CH = CE \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{4}x$. 所以 $BH = BC + CH = \frac{5}{4}x$. 在 $Rt\triangle BHE$ 中, $BE = \sqrt{BH^2 + EH^2} =$

$$\frac{\sqrt{7}}{2}x. \text{ 所以 } \sin \angle EBC = \frac{EH}{BE} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}x}{\frac{\sqrt{7}}{2}x} = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

10. A 提示: ①当 $x=1$ 时, $y=-x+4=3$; 当 $x=3$ 时, $y=-x+4=1$. 对于函数 $y=-x+4$, y 随 x 的增大而减小, 所以在 $1 \leq x \leq 3$ 时, $1 \leq y \leq 3$, 即 $t=1$, 所以 $1 \leq x \leq 3$ 是函数 $y=-x+4$ 的“1级关联范围”, 故①正确. ②当 $x=0$ 时, $y=x^2=0$; 当 $x=2$ 时, $y=x^2=4$. 对于函数 $y=x^2$, 当 $x \geq 0$ 时, y 随 x 的增大而

增大, 所以在 $0 \leq x \leq 2$ 时, $0 \leq y \leq 4$, 即 $t=2$, 所以 $0 \leq x \leq 2$ 是函数 $y=x^2$ 的“2级关联范围”, 故②不正确.

③因为 $k > 0$, 所以该反比例函数图像位于第一象限时, y 随 x 的增大而减小. 设 $0 < m \leq x \leq n$ 为函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的“3级关联范围”, 此时有 $\frac{k}{n} \leq y \leq \frac{k}{m}$, 则

$$\begin{cases} \frac{k}{n} = 3m, \\ \frac{k}{m} = 3n. \end{cases} \text{ 整理, 得 } \frac{k}{mn} = 3. \text{ 因为 } k > 0, \text{ 所以总存在 } m,$$

$n(m < n)$, 使 $\frac{k}{mn} = 3$. 所以函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 总存在

“3级关联范围”, 故③正确. ④对于函数 $y = -x^2 + 2x + 1$, 当 $x < 1$ 时, y 随 x 的增大而增大. 设 $m \leq x \leq n < 1$, 则 $-m^2 + 2m + 1 \leq y \leq -n^2 + 2n + 1$. 当函数 $y = -x^2 + 2x + 1$ 存在“4级关联范围”时, 则

$$\begin{cases} -m^2 + 2m + 1 = 4m, \\ -n^2 + 2n + 1 = 4n, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m = -1 - \sqrt{2}, \\ n = -1 + \sqrt{2}. \end{cases} \text{ 所以函数}$$

$y = -x^2 + 2x + 1$ 的“4级关联范围”是 $-1 - \sqrt{2} \leq x \leq -1 + \sqrt{2}$, 故④不正确. 综上所述, 正确的为①③.

【解后反思】此题属于新定义型, 首先要正确理解定义, 其次要正确理解定义的双重性, 即既是性质又是判定. 本题中①和②属于性质类, ③和④属于判定类.

11. $(x+3)(x-3)$ 12. 4.5×10^4 13. 1800°

14. 假 15. $y = -\frac{1}{x}$ (答案不唯一) 16. 9

17. 2 或 3 提示: 因为 $OA = OB = 5$, 所以 $A(-5, 0)$, $B(0, 5)$. 设平移后点 A, B 的对应点分别为 A', B' , 可知点 $A'(-5+a, -a)$, $B'(a, 5-a)$. 因为 A', B' 两点恰好都落在函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图像上, 所以 $a(5-a) = 6$. 解得 $a=2$ 或 $a=3$.

18. 2 $y = \frac{3x^2}{8-2x}$ 提示: 因为 $CM \parallel AB$, $PQ \parallel AB$, 所以 $CD \parallel PQ$. 所以 $\triangle APQ \sim \triangle ADC$. 所以 $\frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{CD}$, 即 $\frac{x}{2} = \frac{y}{CD}$. 因为 $x=y$, 所以 $CD=2$.

因为 $\triangle APQ \sim \triangle ADC$, 所以 $\frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{CD}$, 即 $\frac{x}{2} = \frac{y}{CD}$. 整理, 得 $CD = \frac{2y}{x}$. 设 $DE=t$. 因为 $AP=2DE$, 所以

$AP=2t$. 因为 $CM \parallel AB$, 所以 $\triangle CDE \sim \triangle BAE$. 所以 $\frac{CD}{AB} = \frac{DE}{AE}$, 即 $\frac{x}{3} = \frac{t}{AE}$. 整理, 得 $AE = \frac{3xt}{2y}$. 所以 $AD =$

$$AE + DE = \frac{3xt}{2y} + t = \frac{t(3x+2y)}{2y}. \text{ 因为 } \triangle APQ \sim \triangle ADC, \text{ 所以 } \frac{AQ}{AC} = \frac{AP}{AD}, \text{ 即 } \frac{x}{2} = \frac{2t}{t(3x+2y)}. \text{ 整理, 得 } y = \frac{3x^2}{8-2x}.$$

【解后反思】本题利用相似三角形的性质“对应线段成比例”表示出 y 与 x 的函数关系. 关键是将未知线段 CD 转化, 根据“ $AP=2DE$ ”, 设 $DE=t$, 从而表示出 AP, AD 的长. 值得注意的是“ t ”设而不求.

19. 解: (1) 原式 $= 4 - 4 + 2 = 2$.

$$(2) \text{ 原式 } = a^2 - 2ab + a^2 + 2ab + b^2 = 2a^2 + b^2.$$

20. 解: (1) 移项得 $(x-2)^2 = 4$, 所以 $x-2=2$ 或 $x-2=-2$, 解得 $x_1=4, x_2=0$.

(2) 解 $2x-3 \leq x$, 得 $x \leq 3$; 解 $x+2 > 1$, 得 $x > -1$. 所以原不等式组的解集为 $-1 < x \leq 3$.

21. (1) 证明: 因为四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $AB=CD, \angle B=\angle C=90^\circ$. 因为 E 是 BC 的中点, 所以 $BE=CE$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCE$

$$\text{中, } \begin{cases} AB=DC, \\ \angle B=\angle C, \text{ 所以 } \triangle ABE \cong \triangle DCE. \\ BE=CE, \end{cases}$$

(2) 证明: 因为 $\triangle ABE \cong \triangle DCE$, 所以 $AE=DE$. 所以 $\angle EAD = \angle EDA$.

22. 解: (1) $\frac{1}{3}$

(2) 列表如下:

结果	白	红	绿
白	(白, 白)	(白, 红)	(白, 绿)
红	(红, 白)	(红, 红)	(红, 绿)
绿	(绿, 白)	(绿, 红)	(绿, 绿)

由列表可知, 共有 9 种等可能的情况, 2 次摸到的球颜色不同的情况有 6 种, 所以 $P(2 \text{ 次摸到的球颜色不同}) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

23. 解: (1) ③

(2) ① 0.12

② 麦穗长度频率分布在 $6.1 \leq x < 6.8$ 之间的频数为 $100 \times 0.3 = 30$. 补全频数分布直方图略.

$$(3) 0.45 + 0.30 + 0.09 = 0.84.$$

答: 长度不小于 5.4 cm 的麦穗在该试验田里所占比例约为 84%.

24. 解: (1) 如图 1, AD 即为所求.

(2) $6\sqrt{2}$. 提示: 如图 2, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , 作 $DF \perp AC$ 于点 F , 则 $\angle AED = \angle AFD = 90^\circ$. 又因为 $\angle BAC = 90^\circ$, 所以四边形 $AEDF$ 为矩形. 因为 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, $DE \perp AB, DF \perp AC$, 所以 $DE=DF$, 所以矩形 $AEDF$ 为正方形, 所以 $AE=AF=ED=DF$. 设 $AE=x$, 所以 $BE=|AB-AE|=|7-x|, FC=|AC-AF|=|5-x|$. 在 $\text{Rt}\triangle BED$ 中, $BD^2 = ED^2 + BE^2 = x^2 + (7-x)^2$. 在 $\text{Rt}\triangle CFD$ 中, $CD^2 = DF^2 + CF^2 = x^2 + (5-x)^2$. 因为 $DB=DC$, 所以 $x^2 + (7-x)^2 = x^2 + (5-x)^2$, 解得 $x=6$. 所以 $AF=DF=6$. 所以 $AD = \sqrt{AF^2 + DF^2} = 6\sqrt{2}$.

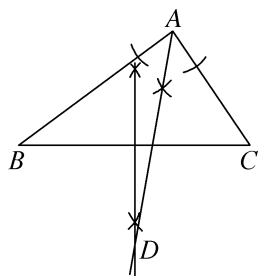


图 1

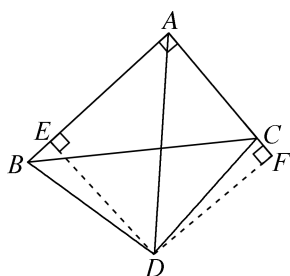


图 2

25. 解: (1) 设 A 种型号劳动用品单价为 x 元/件, B 种型号劳动用品单价为 y 元/件. 根据题意, 得 $\begin{cases} 20x + 25y = 1150, \\ 10x + 20y = 800, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 20, \\ y = 30. \end{cases}$

答: A 种型号劳动用品单价为 20 元/件, B 种型号劳动用品单价为 30 元/件.

(2) 设购买 A 种型号劳动用品 a 件, 购买这 40 件劳动用品需要 W 元, 则购买 B 种型号劳动用品 $(40-a)$ 件. 根据题意, 得 $W = 20a + 30(40-a) = -10a + 1200$. 因为 $-10 < 0$, 所以 W 随 a 的增大而减小. 因为 $10 \leq a \leq 25$, 所以当 $a=25$ 时, W 取最小值, 最小值为 $-10 \times 25 + 1200 = 950$.

答: 该校购买这 40 件劳动用品至少需要 950 元.

26. (1) 证明: 因为 $\widehat{CD} = \widehat{DB}$, 所以 $\angle CAD = \angle DAB$. 因为 $DE=AD$, 所以 $\angle E = \angle DAB$. 所以 $\angle CAD = \angle E$. 又因为 $\angle C = \angle C$, 所以 $\triangle CAD \sim \triangle CEA$.

(2) 解: 连接 BD . 因为 AB 为直径, 所以 $\angle ADB = 90^\circ$. 设 $\angle CAD = \angle DAB = \alpha$, 可得 $\angle CAE = 2\alpha$. 由(1)知, $\triangle CAD \sim \triangle CEA$, 所以 $\angle ADC = \angle CAE = 2\alpha$. 因为四边形 $ABCD$ 是圆的内接四边形, 所以 $\angle CAB + \angle CDB = 180^\circ$, 即 $2\alpha + 2\alpha + 90^\circ = 180^\circ$. 解得 $\alpha = 22.5^\circ$. 所以 $\angle ADC = 2\alpha = 45^\circ$.

27. 解: (1) 如图 1, 过点 C 作 $CH \perp AD$, 则 $\angle AHC = \angle CHD = 90^\circ$. 因为 $AD \parallel CB$, 所以 $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$. 因为 $\angle ABC = 90^\circ$, 所以 $\angle BAC = 90^\circ$, 所以 $\angle ABC = \angle BAC = \angle AHC = 90^\circ$, 所以四边形 $ABCH$ 是矩形. 所以 $CH = AB = 12$, $AH = BC = 8$. 所以 $DH = AD - AH = 5$. 在 $\text{Rt}\triangle CHD$ 中, $CD = \sqrt{CH^2 + DH^2} = 13 = AD$. 当点 C' 与点 A 重合时, 连接 CA , 由折叠的性质可得出 MN 垂直平分 AC . 又可知点 D 在 CA 的垂直平分线(直线 MN)上, 所以点 N 与点 D 重合. 易得 $AM = MC$. 设 $B'M = BM = x$, 则 $AM = CM = 12 - x$. 在 $\text{Rt}\triangle MBC$ 中, 因为 $BM^2 + BC^2 = MC^2$, 所以 $x^2 + 8^2 = (12 - x)^2$, 解得 $x = \frac{10}{3}$. 所以 $B'M = \frac{10}{3}$.

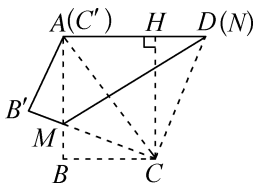


图 1

(2) ①当点 F 在 AB 上时, 如图 2. 由(1)可知 $\tan \angle ADC = \frac{CH}{HD} = \frac{12}{5}$. 因为 $\angle AFC' = \angle ADC$, 所以 $\tan \angle AFC' = \frac{12}{5}$. 在 $\text{Rt}\triangle AFC'$ 中, 设 $AF = 5x$, $AC' = 12x$, 则 $C'F = 13x$. 根据折叠的性质, 得 $\angle FB'M = \angle ABC = 90^\circ$, $B'C' = BC = 8$, 所以 $B'F = 8 - 13x$. 因为 $\angle B'FM = \angle AFC'$, 所以 $\tan \angle B'FM = \frac{12}{5}$. 在 $\text{Rt}\triangle FB'M$ 中, $\tan \angle B'FM = \frac{B'M}{B'F} = \frac{12}{5}$,

所以 $B'M = \frac{12}{5}(8 - 13x) = BM$. 所以 $MF = \frac{13}{5}(8 - 13x)$. 因为 $AF + MF + BM = AB$, 所以 $5x + \frac{12}{5}(8 - 13x) + \frac{13}{5}(8 - 13x) = 12$, 解得 $x = \frac{7}{15}$. 所以 $AC' = 12x = \frac{28}{5}$. ②当点 F 在 BA 的延长线上时, 如图 3. 同上可得 $\tan \angle AFC' = \frac{12}{5}$, 在 $\text{Rt}\triangle AFC'$ 中, 设 $AF = 5x$, $AC' = 12x$, 则 $C'F = 13x$, 所以 $B'F = 13x - 8$. 在 $\text{Rt}\triangle FB'M$ 中, 可得 $B'M = \frac{12}{5}(13x - 8)$. 所以 $MF = \frac{13}{5}(13x - 8)$, $BM = \frac{12}{5}(13x - 8)$. 所以 $FB = 5x + 12 = \frac{12}{5}(13x - 8) + \frac{13}{5}(13x - 8)$, 解得 $x = \frac{13}{15}$. 所以 $AC' = 12x = \frac{52}{5}$.

综上所述, AC' 的长为 $\frac{28}{5}$ 或 $\frac{52}{5}$.

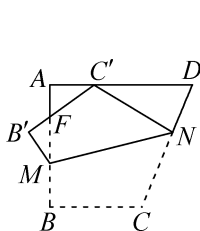


图 2

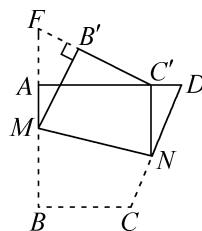


图 3

【解后反思】遇到翻折类的题目, 通常利用直角三角形的知识解决问题. 对于已知角度关系, 求线段长的题, 通常利用三角函数来表示角与线段之间的关系, 从而达到相互转化的目的. 本题第(2)问中, 通过角度相等得到对应的直角三角形中三边之间的等量关系, 再利用翻折的性质即可求解, 关键在于: 一要合理地设未知数, 表示出 AF, MF, BM 的长, 再找到等量关系列出方程; 二要注意分类讨论, 即根据点 F 位置不同, 有两种不同的情况.

28. 解: (1) 把点 $A(-1, -\frac{1}{2})$, $B(2, 1)$ 代入 $y = ax^2 + x + c$, 得 $\begin{cases} a - 1 + c = -\frac{1}{2}, \\ 4a + 2 + c = 1. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ c = 1. \end{cases}$ 所以这个二次函数的表达式为

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1.$$

(2) 因为点 $C(m+1, y_1), D(m+2, y_2)$ 都在该二次函数的图像上, 所以 $y_1 = -\frac{1}{2}(m+1)^2 + (m+1) + 1, y_2 = -\frac{1}{2}(m+2)^2 + (m+2) + 1$. 所以 $y_1 - y_2 = -\frac{1}{2}(m+1)^2 + (m+1) + 1 - \left[-\frac{1}{2}(m+2)^2 + (m+2) + 1\right] = m + \frac{1}{2}$. 当 $m + \frac{1}{2} > 0$ 时, 即 $m > -\frac{1}{2}$ 时, $y_1 > y_2$; 当 $m + \frac{1}{2} = 0$ 时, 即 $m = -\frac{1}{2}$ 时, $y_1 = y_2$; 当 $m + \frac{1}{2} < 0$ 时, 即 $m < -\frac{1}{2}$ 时, $y_1 < y_2$.

(3) 存在. 点 N 坐标为 $(0, -\frac{15+5\sqrt{41}}{16})$ 或 $(0, -5)$ 或 $(0, \frac{5}{8})$ 或 $(0, \frac{-15+5\sqrt{41}}{16})$ 或 $(0, 5)$ 或 $(0, -\frac{5}{8})$. 提示: 假设在 y 轴上存在点 N , 使得以 P, Q, M, N 为顶点的四边形是正方形. 由题意易得, 直线 AB 的函数表达式为 $y = \frac{1}{2}x$.

当 PQ 为正方形的边时:

① 因为点 $B(2, 1)$, 所以 $\tan \angle BOC = \frac{1}{2}$. 如图 1, 过点 M 作 y 轴的垂线, 垂足为 G , 过点 P 作 MG 的垂线, 垂足为 H . 因为 $\angle BOC + \angle QON = 90^\circ, \angle QNO + \angle QON = 90^\circ$, 所以 $\angle BOC = \angle QNO$. 同理, $\angle NMG = \angle QNO$, 所以 $\angle BOC = \angle NMG$, 所以 $\tan \angle NMG = \tan \angle BOC = \frac{1}{2}$, 则 $MG = 2NG$. 设 $NG = t$, 则 $MG = 2t$. 所以点 $M(-2t, -2t^2 - 2t + 1)$, 所以点 N 的纵坐标为 $-2t^2 - 2t + 1 + t = -2t^2 - t + 1$, 即点 $N(0, -2t^2 - t + 1)$. 因为以 P, Q, M, N 为顶点的四边形是正方形, 所以 $\angle PMN = 90^\circ, PM = MN$. 所以 $\angle PMH + \angle NMH = 90^\circ$. 因为 $\angle PMH + \angle MPH = 90^\circ$, 所以 $\angle NMG = \angle MPH$. 易证 $\triangle PHM \cong \triangle MGN$. 所以 $PH = MG = 2t, HM = GN = t$. 所以点 $P(-3t, -2t^2 + 1)$, 把点 $P(-3t, -2t^2 + 1)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x$, 易得 $t_1 = \frac{3+\sqrt{41}}{8}, t_2 = \frac{3-\sqrt{41}}{8}$ (舍去). 所以点

$$N(0, -\frac{15+5\sqrt{41}}{16}).$$

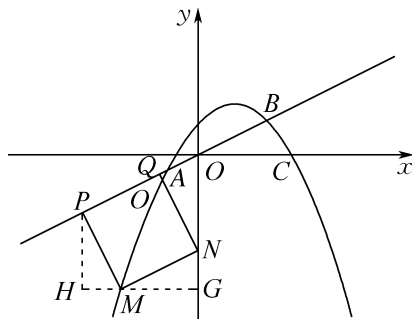


图 1

② 如图 2, 构造 $\text{Rt} \triangle MQG, \text{Rt} \triangle NMH$, 由 ①, 得 $\triangle MQG \cong \triangle NMH, \tan \angle MNH = \frac{1}{2}$. 设 $NH = GM = 2t$, 则 $QG = MH = t$. 所以点 $M(2t, -2t^2 + 2t + 1)$, 点 $N(0, -2t^2 + t + 1)$, 点 $Q(t, -2t^2 + 4t + 1)$. 把点 $Q(t, -2t^2 + 4t + 1)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x$, 易得 $t_1 = 2, t_2 = -\frac{1}{4}$ (舍去). 所以点 $N(0, -5)$.

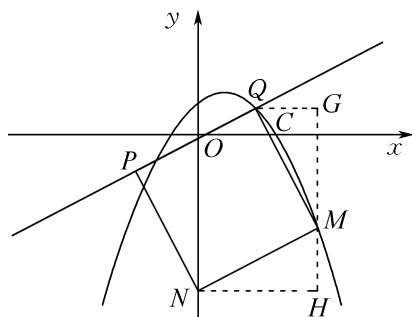


图 2

③ 如图 3, 设 $GN = HM = 2t$, 则 $MG = PH = t$. 所以点 $M(-2t, -2t^2 - 2t + 1)$, 点 $N(0, -2t^2 - t + 1)$, 点 $P(-t, -2t^2 - 4t + 1)$. 把 $P(-t, -2t^2 - 4t + 1)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x$, 易得 $t_1 = \frac{1}{4}, t_2 = -2$ (舍去). 所以点 $N(0, \frac{5}{8})$.

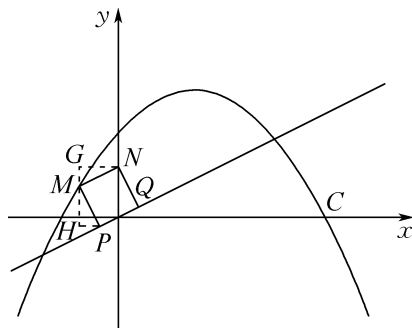


图 3

④ 如图 4, 设 $GM = HN = 2t$, 则 $GN = HP = t$. 所以点 $M(2t, -2t^2 + 2t + 1)$, 点 $N(0, -2t^2 + t + 1)$, 点 $P(t, -2t^2 - t + 1)$. 把点 $P(t, -2t^2 - t + 1)$ 代入 $y =$

$\frac{1}{2}x$, 易得 $t_1 = \frac{-3+\sqrt{41}}{8}$, $t_2 = \frac{-3-\sqrt{41}}{8}$ (舍去). 所以点 $N(0, \frac{-15+5\sqrt{41}}{16})$.

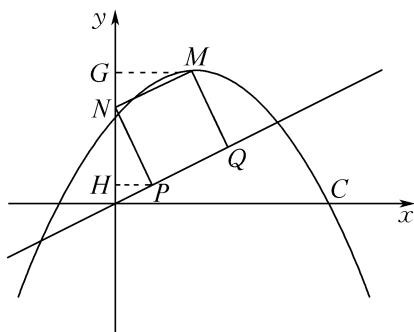


图 4

当 PQ 为正方形对角线时:

⑤如图 5, 构造矩形 $HGJI$, 过点 P 作 $PK \perp IJ$ 于点 K , 易得, $\angle QPK = \angle BOC$, 所以 $\tan \angle QPK = \frac{1}{2}$. 设 $QK = x$, 则 $PK = 2x$. 同①可得 $\triangle PNH \cong \triangle MPG \cong \triangle QMJ \cong \triangle NQJ$. 所以 $HN = PG = MJ = IQ$, $PH = GM = QJ = NI$. 所以四边形 $HGJI$ 为正方形. 所以 $IJ = PK = 2x$. 所以 $IQ = PG = JK = \frac{1}{2}(IJ - QK) = \frac{1}{2}x$, 则 $PH = GM = QJ = NI = \frac{3}{2}x$. 所以 $\tan \angle PMG = \frac{1}{3}$. 设 $PG = HN = t$, 则 $PH = GM = 3t$. 所以点 $M(2t, -2t^2 + 2t + 1)$, 点 $N(0, -2t^2 + 6t + 1)$, 点 $P(-t, -2t^2 + 3t + 1)$. 把点 $P(-t, -2t^2 + 3t + 1)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x$, 易得 $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{1}{4}$ (舍去). 所以点 $N(0, 5)$.

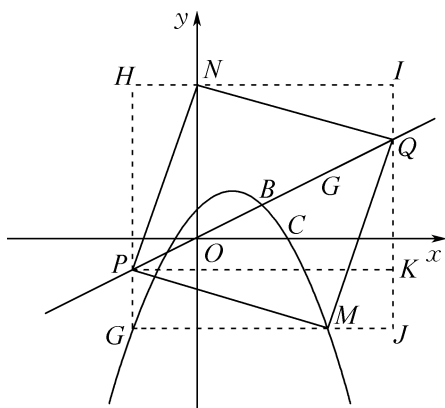


图 5

⑥如图 6, 设 $PG = HM = t$, 则 $PH = GN = 3t$. 所以点 $M(-2t, -2t^2 - 2t + 1)$, 点 $N(0, -2t^2 - 6t + 1)$, 点 $P(-3t, -2t^2 - 5t + 1)$. 把点 $P(-3t, -2t^2 - 5t + 1)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x$, 易得 $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = -2$ (舍去). 所以点

$N(0, -\frac{5}{8})$.

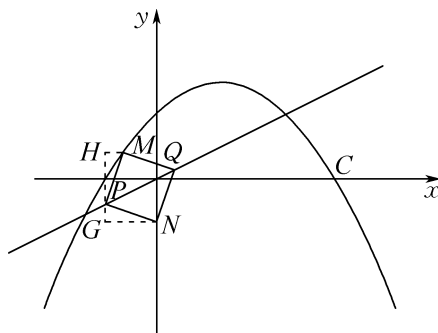


图 6

【解后反思】本题主要考查二次函数、解直角三角形、正方形、三角形全等及代数式的大小比较等有关知识. 第(2)问是代数式的大小比较, 其基本方法是“作差法”. 即“若 $a - b < 0$, 则 $a < b$; 若 $a - b = 0$, 则 $a = b$; 若 $a - b > 0$, 则 $a > b$.”第(3)问属于存在性问题, 解决本题的思路是先假设存在, 再根据模型求解, 要注意解要符合要求. 解决本题关键是先画出正方形, 构造出“三直角三角形”, 然后合理的设出未知数, 表示出相应的点的坐标, 最后根据数量关系列出方程求解. 画图时要注意分类讨论, 即 PQ 可以是边, 也可以是对角线.

B11* 常州市 2024 年初中学业水平考试

1. C 2. D 3. B 4. B

5. A 提示: 过点 P 分别作 OA, OB 的垂线, 垂足分别为 E, F . 因为点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上, 所以 $PE = PF$, 由平行线间距离相等可知 $d_1 = PF, d_2 = PE$, 所以 $d_1 = d_2$.

6. C 7. A

8. D 提示: 由题图可知, 第 1 km 所用的时间最长, 选项 A 正确; 平均速度 = 路程 ÷ 时间, 故“配速”越小, 平均速度越大, 由图可知第 5 km 的“配速”最小, 所以第 5 km 的平均速度最大, 选项 B 正确; 第 2 km 和第 3 km 的“配速”相同, 所以第 2 km 和第 3 km 的平均速度相同, 选项 C 正确; 前 2 km 的“配速”大于最后 2 km 的“配速”, 所以前 2 km 的平均速度小于最后 2 km 的平均速度, 选项 D 错误.

【方法点拨】本题的关键在于正确理解“配速”的定义, 是指每行进 1 km 所用的时间. 所以“配速”越小, 平均速度越大.

9. 4 10. $(x - 2y)^2$ 11. 1

12. $y = 10 - 2x (\frac{5}{2} < x < 5)$ 13. $(-2, -1)$

14. 70 15. $\frac{1}{2}$

16. $\frac{3}{2}$ 提示: 因为 $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 4$, D 是边

AC 的中点, 所以 $CD = \frac{1}{2} AC = 3$, 所以 $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = 5$. 由翻折的性质, 得 $CD = DF = 3$, $CE = EF$, $\angle EFD = 90^\circ$, 所以 $BF = BD - DF = 2$, $\angle BFE = 90^\circ$. 设 $CE = x$, 则 $EF = x$, $BE = BC - CE = 4 - x$. 在 $Rt\triangle BFE$ 中, 由勾股定理, 得 $(4 - x)^2 = x^2 + 2^2$, 解得 $x = \frac{3}{2}$, 即 $CE = \frac{3}{2}$.

17. $>$ 提示: 设这组数据为前 9 个数分别为 $x_1, x_2, \dots$,

x_9 , 由题意可知, $s_1^2 = \frac{1}{9} [(x_1 - 20)^2 + (x_2 - 20)^2 + \dots + (x_9 - 20)^2]$, $s_2^2 = \frac{1}{10} [(x_1 - 20)^2 + (x_2 - 20)^2 + \dots + (x_9 - 20)^2 + (20 - 20)^2] = \frac{1}{10} [(x_1 - 20)^2 + (x_2 - 20)^2 + \dots + (x_9 - 20)^2]$, 所以 $s_1^2 > s_2^2$.

18. $54 \leq v \leq 72$ 提示: 因速度单位转换公式是 $v \text{ km/h} =$

$$\frac{v}{3.6} \text{ m/s}, \text{ 故根据题意, 得 } \begin{cases} v \geq 40, \\ 32 \times \frac{v}{3.6} \geq 480, \\ 44 \times \frac{v}{3.6} \leq 880, \\ (44 + 60) \times \frac{v}{3.6} \geq 880, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$54 \leq v \leq 72$, 所以车速 $v \text{ (km/h)}$ 的取值范围是 $54 \leq v \leq 72$.

【解后反思】 本题是跨学科综合题, 密切联系生活实际, 意欲“一路绿灯”, 就要估算速度, 因“前方第一个路口显示绿灯倒计时 32 s”, 故必须提高速度, 尽量在 32 s 前到达该处; 而“第二个路口显示红灯倒计时 44 s”, 说明 44 s 内无法通行, 故不必加速前进, 但从 44 s 开始至 104 s 间, 必须到达该处, 当然, 为避免“红灯”, 也可减速慢行, 等待第二次绿灯, 但不符合“不低于 40 km/h 的车速”这一限速要求, 故列得上述不等式组.

19. 解: (1) $\begin{cases} x - y = 0 & \text{①,} \\ 3x + y = 4 & \text{②.} \end{cases}$ ① + ②, 得 $4x =$

4, 解得 $x = 1$; 把 $x = 1$ 代入①, 得 $1 - y = 0$,

解得 $y = 1$. 所以方程组的解为 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$

(2) 解 $3x - 6 < 0$, 得 $x < 2$; 解 $\frac{x - 1}{2} < x$, 得 $x > -1$. 所以原不等式组的解集为 $-1 < x < 2$.

20. 解: 原式 $= x^2 + 2x + 1 - x^2 - x = x + 1$. 当 $x = \sqrt{3} - 1$ 时, 原式 $= \sqrt{3} - 1 + 1 = \sqrt{3}$.

21. 解: (1) 对充电宝的使用寿命进行调查, 对充电宝具有破坏性, 故不能采用普查的方式.

(2) ①② 提示: 由统计表可知: 这 20 个充电宝的完全充放电次数都不低于 300 次, ①正确; 将数据排序后, 第 10 个和第 11 个数据均位于 $500 \leq t < 600$, 故这 20 个充电宝的完全充放电次数 t 的中位数满足 $500 \leq t < 600$, ②正确; 由统计表中的数据可知, $300 \leq t < 400$ 的数据只有 2 个, 故平均数一定大于 400, ③错误.

$$(3) 2\,000 \times \frac{5}{20} = 500 \text{ (个)}.$$

答: 这批充电宝中完全充放电次数在 600 次及以上的数量约为 500 个.

22. 解: (1) $\frac{1}{3}$

(2) 设用 A, B, C 分别表示“石头”“剪子”“布”, 列表如下:

甲	乙		
	A	B	C
A	——	(A, B)	(A, C)
B	(B, A)	——	(B, C)
C	(C, A)	(C, B)	——

由列表可知, 一共有 6 种等可能的情况, 其中甲获胜的情况有 (A, B), (B, C), (C, A), 共 3 种, 所以甲获胜的概率为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

23. (1) 证明: 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DFE$ 中, $\begin{cases} AB = DF, \\ AC = DE, \\ BC = EF, \end{cases}$

以 $\triangle ABC \cong \triangle DFE$, 所以 $\angle ACB = \angle DEF$, 所以 $EG = CG$, 所以 $\triangle GEC$ 是等腰三角形.

(2) $AD \parallel l$ 提示: 因为 $AC = DE$, $EG = CG$, 所以 $AC - CG = DE - EG$, 所以 $AG = DG$, 所以 $\angle GAD = \angle GDA = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle AGD)$. 又因为 $\angle ACE = \angle DEF = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle CGE)$, $\angle AGD = \angle EGC$, 所以 $\angle CAD = \angle ACB$, 所以 $AD \parallel l$.

24. 解: (1) 将点 $A(-1, n)$, $B(2, 1)$ 代入 $y = \frac{m}{x}$,

易得 $m = 2 \times 1 = -1 \cdot n$, 所以 $m = 2, n = -2$, 所以反比例函数的表达式为 $y = \frac{2}{x}$, 点

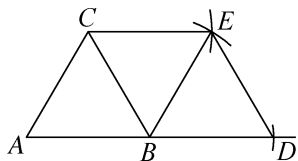
A 坐标为 $(-1, -2)$. 所以 $\begin{cases} -k + b = -2, \\ 2k + b = 1, \end{cases}$ 解

得 $\begin{cases} k = 1, \\ b = -1, \end{cases}$ 所以一次函数的表达式为 $y = x - 1$.

(2) 设直线 AB 与 y 轴交于点 C, 因为 $y = x - 1$, 所以当 $x = 0$ 时, $y = -1$, 所以点 C $(0, -1)$. 所以 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OC \cdot |x_B - x_A| = \frac{1}{2} \times 1 \times (2 + 1) = \frac{3}{2}$.

25. 解: 由题意, 得 $AB = 1.2 + c + d = 1.2 + 2c = 1.2 + 4a$, $AD = 0.8 + a + b = 0.8 + 2a$. 因为 AB 与 AD 的比是 16 : 10, 所以 $\frac{1.2 + 4a}{0.8 + 2a} = \frac{16}{10}$, 解得 $a = 0.1$. 经检验 $a = 0.1$ 是原方程的解. 所以上、下、左、右边衬的宽度分别是 0.1 m, 0.1 m, 0.2 m, 0.2 m.

26. 解: (1) CE (或 BD) 2 (或 1)
(2) 如图所示, $\triangle EBD$ 即为所求.



(3) r 的取值范围为 $0 < r \leq 4 - 2\sqrt{2}$ 或 $r \geq 4 + 2\sqrt{2}$. 提示: 由题意可知, $OD = OE = 1, OG = 4$. 因为对 $\odot G$ 上的任意点 F , 连接 DE, EF, FD 所形成的图形都存在“平移关联图形”, 且满足 $d \geq 3$, 且 $DE = 2 < 3$, 所以 $DF \geq 3$ 或 $EF \geq 3$, 二者至少成立一个. ①如图 1, 当 DE 在圆外时, 分别以点 D, E 为圆心, 3 为半径画弧, 两弧交于点 F , 则点 F 在 y 轴上, 且 $DF = 3, EF = 3$, 可得 $FO = \sqrt{DF^2 - OD^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$, $GF = OG - OF = 4 - 2\sqrt{2}$, 所以 $0 < r \leq 4 - 2\sqrt{2}$. ②如图 2, 当 DE 在圆内时, 同理可得点 F 在 y 轴上, 且 $DF = 3, EF = 3$, 可得 $FO = 2\sqrt{2}$, $GF = OG + OF = 4 + 2\sqrt{2}$, 所以 $r \geq 4 + 2\sqrt{2}$.

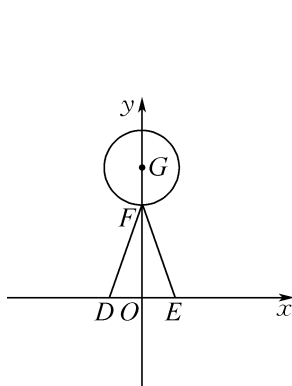


图 1

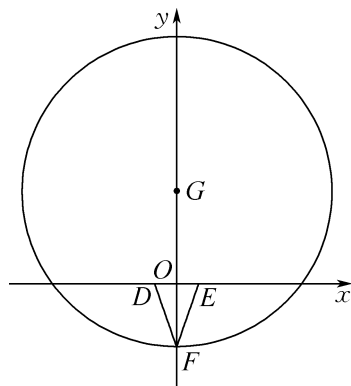


图 2

27. 解: (1) 菱形 提示: 如图 1, 连接 BE , 过点 E 作 $EM \perp DF$ 于点 M . 因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形, E 是 AC 的中点, 所以 $\angle BEC = 90^\circ$. 又因为 $BC = 6$ cm, 所以 $BE = BC \cdot \sin C = 3\sqrt{3}$. 同理, $EM = DE \cdot \sin D = 3\sqrt{3} = BE$, 所以点 B 与点 M 重合, 即 $BE \perp DF$, $\angle EBD = 90^\circ = \angle BEC$. 可得 $\angle BED = 30^\circ = \angle CBE$, 所以 $EH = BH$, $\angle GEB = \angle EBH = \angle GBE = \angle BEH = 30^\circ$, 所以 $BG \parallel EH, BH \parallel EG$, 所以四边形 $BHEG$ 是平行四边形. 又因为 $EH = BH$, 所以平行四边形 $BHEG$ 是菱形.

(2) 因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 都是等边三角形, 所以 $\angle ABC = \angle DEF = \angle C = 60^\circ, AC = BC = 6$ cm. 因为 $EF \parallel BC$, 所以 $\angle CHE = \angle DEF = 60^\circ$, 所以 $\angle ABC = \angle CHE$, 所以 $BG \parallel EH$, 所以四边形 $BHEG$ 是平行四边形. 因为 $\angle C = \angle CHE = 60^\circ$, 所以 $\triangle EHC$ 是等边三角形. 如图 2, 过点 E 作 $ET \perp HC$ 于点 T . 设 $EH = CH = 2x$ cm, 则 $BH = (6 - 2x)$ cm, $HT = \frac{1}{2} CH = x$ cm. 所以 $ET = \sqrt{EH^2 - HT^2} = \sqrt{3}x$ cm, 所以 $S_{\text{重叠}} = S_{\text{四边形} BHEG} = BH \cdot ET = \sqrt{3}x(6 - 2x) = -2\sqrt{3}(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}) = -2\sqrt{3}(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{9\sqrt{3}}{2}$. 因为 $-2\sqrt{3} < 0$, 所以当 $x = \frac{3}{2}$ 时, $S_{\text{重叠}}$ 有最大值, 最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm^2 .

(3) $AE = BF$, 理由如下:

如图 3, 过点 B 作 $BM \perp AC$ 于点 M , 过点 E 作 $EN \perp DF$ 于点 N , 则 M, E 分别为 AC, DF

的中点,由题意可知,点 M 在线段 AE 上,点 N 在线段 FB 上. 连接 BE . 因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 都是边长为 6 cm 的等边三角形,所以 $AM = FN = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}AC = 3$ cm, $EF = AB = 6$ cm. 所以由勾股定理可得 $NE = \sqrt{EF^2 - FN^2} = 3\sqrt{3}$ cm, $BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = 3\sqrt{3}$ cm, 所以 $EN = BM$, 又因为 $BE = BE$, 所以 $\text{Rt} \triangle NBE \cong \text{Rt} \triangle MEB$ (HL), 所以 $NB = ME$. 所以 $FN + BN = AM + ME$, 即 $AE = BF$.

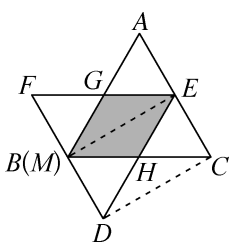


图 1

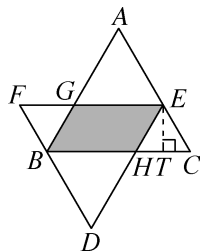


图 2

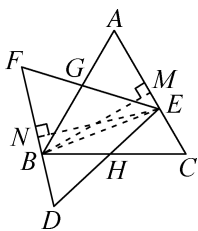


图 3

【解后反思】本题以纸片叠放为背景,综合考查四边形的判定、函数的最值及等边三角形的性质. 在已知一边与一角对应相等的情况下,一般考虑寻找另一对相等的角或作垂线寻找一相等的直角边,用 AAS(ASA)或 HL 证明三角形全等,从而求解. 实际上,本题第(1)问和第(3)问中,可以发现 B, E, C, D 或 B, E, A, F 均是四点共圆的,这即是“等角共圆定理”,即若线段同侧两点到线段两端点连线夹角相等,那么这两点和线段两端点四点共圆. 这个定理是四点共圆的基本判定方法之一,在几何问题中有广泛的运用.

28. 解:(1) 3

(2) **解法 1** ①将点 $A(-1,0)$ 代入 $y = -x^2 + bx + 3$, 得 $-1 - b + 3 = 0$, 解得 $b = 2$, 所以二次函数的表达式为 $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$, 所以对称轴为直线 $x = 1$. 当 $1 \leq x \leq m$, 且 $m > 1$ 时, 可知 y 随着 x 的增大而减小. 所以当 $x = 1$ 时, $s = -1 + 2 + 3 = 4$;

当 $x = m$ 时, $t = -m^2 + 2m + 3$. 由 $s - t = 2$, 得 $4 + m^2 - 2m - 3 = 2$, 解得 $m = 1 + \sqrt{2}$ 或 $m = 1 - \sqrt{2}$ (舍去), 所以 $m = 1 + \sqrt{2}$.

②在 $\text{Rt} \triangle ACO$ 中, $\tan \angle ACO = \frac{AO}{CO} = \frac{1}{3}$, 由题意, 得 $DP \parallel CQ$, $DQ = PC$, 所以四边形 $DPCQ$ 为平行四边形或等腰梯形.

如图 1, 当点 P 在 x 轴上方, 四边形 $DPCQ$ 为平行四边形时, 则 $PD = QC$. 因为 $DP \parallel y$ 轴, 所以 $\angle 1 = \angle DPQ$. 因为 $\angle DPQ = \angle ACO$, 所以 $\tan \angle DPQ = \tan \angle ACO = \tan \angle 1 = \frac{1}{3}$, 因为 $\frac{OF}{OQ} = \frac{FD}{PD} = \frac{1}{3}$, 所以设 $FD = k$, $OF = n$, 则 $PD = 3k$, $OQ = 3n$, 所以 $3k = 3 + 3n$, 所以 $n = k - 1$, 所以点 $P(2k - 1, 3k)$, 将点 $P(2k - 1, 3k)$ 代入 $y = -x^2 + 2x + 3$, 得 $-(2k - 1)^2 + 2(2k - 1) + 3 = 3k$, 解得 $k = \frac{5}{4}$ 或 $k = 0$ (舍去), 所以 $x_P = \frac{5}{4} \times 2 - 1 = \frac{3}{2}$.

如图 2, 当四边形 $DPCQ$ 为等腰梯形时, 则 $PC = QD$, 过点 P 作 $PE \perp y$ 轴于点 E , 因为 $DP \parallel y$ 轴, 所以 $PE = DO$, 所以 $\text{Rt} \triangle PCE \cong \text{Rt} \triangle DQO$, 所以 $CE = QO$, 所以 $QC + CE = QC + QO$, 所以 $QE = OC = 3$, 因为 $\tan \angle 1 = \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{PE}{QE} = \frac{1}{3}$, 所以设 $PE = p$, 则 $QE = 3p$, 所以 $3p = 3$, 所以 $p = 1$, 即 $x_P = 1$.

如图 3, 当点 P 在 x 轴下方抛物线上时, 此时四边形 $DPCQ$ 为平行四边形, $DP = QC$. 因为 $\tan \angle DPQ = \tan \angle ACO = \tan \angle 1 = \frac{1}{3}$, 所

以 $\frac{OG}{OQ} = \frac{DG}{PD} = \frac{1}{3}$, 设 $OG = e$, $DG = g$, 所以 $OQ = 3e$, $DP = 3g = QC$, 所以 $OQ - OC = CQ$, 所以 $3e - 3 = 3g$, 所以 $g = e - 1$, 所以点 $P(2e - 1, 3 - 3e)$, 将点 P 代入 $y = -x^2 + 2x + 3$, 得 $-(2e - 1)^2 + 2(2e - 1) + 3 = 3 - 3e$, 解得 $e = \frac{11 + \sqrt{73}}{8}$ 或 $e = \frac{11 - \sqrt{73}}{8}$, 而当

线 l 绕点 B 逆时针旋转 45° , 所得的直线应与直线 $y = -x$ 平行, 所以设旋转后所得直线的函数表达式为 $y = -x + b$. 因为该直线经过第一、二、四象限, 所以 $b > 0$. 由 $-\frac{4}{m} = -m + b$, 得 $b = m - \frac{4}{m} = \frac{m^2 - 4}{m} > 0$. 当点 A 在原点左侧时, $m < 0$, 所以 $m^2 - 4 < 0$, 解得 $-2 < m < 2$, 又因为 $m < 0$, 所以 $-2 < m < 0$; 当点 A 在原点右侧时, $m > 0$, 所以 $m^2 - 4 > 0$, 所以 $m > 2$. 综上所述, m 的取值范围是 $-2 < m < 0$ 或 $m > 2$.

【解后反思】 因为点 A 的位置可以在 x 轴的正半轴上或负半轴上, 所以符合题意的图形有两种, 再根据直线经过第一、二、四象限, 列出不等式求解.

19. 解: (1) 原式 $= 1 - 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} = 1$.

(2) 原式 $= \frac{a+2}{a^2} \div \frac{a+2}{a} = \frac{a+2}{a^2} \cdot \frac{a}{a+2} = \frac{1}{a}$.

20. 解: (1) 方程两边同时乘以 $x(x+1)$, 得 $3(x+1) = 2x$. 解得 $x = -3$. 检验: 当 $x = -3$ 时, $x(x+1) \neq 0$, 所以 $x = -3$ 是原方程的解.

(2) 解 $3x - 4 \leq 2x$, 得 $x \leq 4$. 解 $\frac{x+5}{2} > 3$, 得 $x > 1$. 所以原不等式组的解集是 $1 < x \leq 4$.

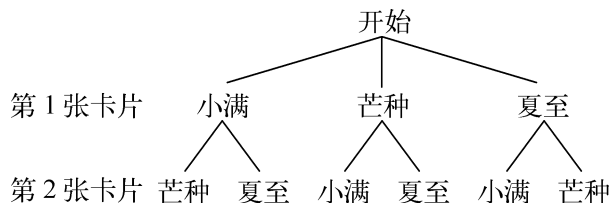
21. (1) 证明: 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BAD$ 中,

$$\begin{cases} \angle C = \angle D, \\ \angle CBA = \angle DAB, \text{ 所以 } \triangle ABC \cong \triangle BAD. \\ AB = BA, \end{cases}$$

(2) 20 提示: 因为 $\angle C = \angle D = 90^\circ$, $\angle DAB = 70^\circ$, 所以 $\angle DBA = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$. 因为 $\triangle ABC \cong \triangle BAD$, 所以 $\angle CAB = \angle DBA = 20^\circ$.

22. 解: (1) $\frac{1}{3}$

(2) 画树状图如下:



由树状图可知, 一共有 6 种等可能情况, 符合条件的有 2 种. 所以 $P(\text{抽到一张写有“芒种”, 一张写有“夏至”的卡片}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

23. 解: (1) B A

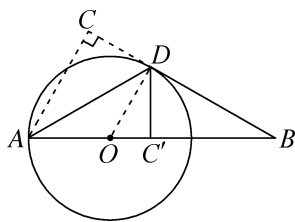
(2) $(500 - 372) \div 500 = 0.256$.

答: 实践组摸到黄球的频率是 0.256.

(3) 创新组摸到红球的频率是 0.438. (答案不唯一)

24. 解: BC 与 $\odot O$ 相切. 理由如下:

如图, 连接 OD . 因为 $OA = OD$, 所以 $\angle OAD = \angle ODA$. 由翻折可知, $\angle CAD = \angle OAD$, 所以 $\angle CAD = \angle ODA$, 所以 $AC \parallel OD$, 所以 $\angle ODC = \angle ACB = 90^\circ$. 所以 $OD \perp BC$, 即 BC 与 $\odot O$ 相切.



25. 解: (1) 因为一次函数 $y = 2x + m$ 的图像过点 $A(-3, 0)$, 所以 $0 = 2 \times (-3) + m$, 解得 $m = 6$. 则一次函数表达式为 $y = 2x + 6$. 因为点 $C(1, n)$ 在一次函数 $y = 2x + 6$ 的图像上, 所以 $n = 8$. 又因为点 $C(1, 8)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上, 所以 $k = 8$.

(2) 点 P 的坐标为 $(6, \frac{4}{3})$ 或 $(-6, -\frac{4}{3})$.

提示: 设点 $P(x, \frac{8}{x})$. 对于函数 $y = 2x + 6$, 当 $x = 0$ 时, $y = 6$, 所以点 $B(0, 6)$, 即 $OB = 6$. 因为 $S_{\triangle OBP} = S_{\triangle OBE}$, 所以 $\frac{1}{2} \times 6 \times |x_P| = \frac{1}{2} \times 6 \times 6$, 解得 $x_P = \pm 6$. 则 $y_P = \frac{8}{x_P} = \pm \frac{4}{3}$. 所以点 P 的坐标为 $(6, \frac{4}{3})$ 或 $(-6, -\frac{4}{3})$.

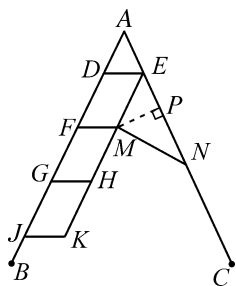
26. 解: (1) DE

(2) ① $\frac{4}{5}$ 提示: 因为 $DE \parallel FM$, $DE = FM$, 所以四边形 $DEMF$ 是平行四边形. 所以 $EM \parallel DF$. 所以 $\angle MEN = \angle BAC$, 所以 $\sin \angle MEN = \sin \angle BAC \approx \frac{4}{5}$.

② $MN + 10 = EN$ 提示: 因为四边形 $DEMF$ 是平行四边形, 所以 $EM = DF = 30$ cm. 因为 $AN =$

$MN+EM+AD-DE, AN=EN+AD$, 所以 $MN+EM+AD-DE=EN+AD$. 所以 $MN+EM-DE=EN$. 所以 $MN+30-20=EN$. 即 $MN+10=EN$.

(3) 如图, 过点 M 作 $MP \perp EN$ 于点 P . 因为 $DE \parallel FM, DE=FM$, 所以四边形 $DEMF$ 是平行四边形, 所以 $ME=DF=30$ cm. 在 $\text{Rt}\triangle MPE$ 中, 因为 $\sin \angle MEN = \frac{MP}{ME} = \frac{4}{5}$, $ME=30$ cm, 所以 $MP=24$ cm, $PE=\sqrt{ME^2-MP^2}=18$ cm. 所以 $PN=EN-PE=MN+10-18=MN-8$. 在 $\text{Rt}\triangle MPN$ 中, 由勾股定理, 得 $MN^2=MP^2+PN^2$, 即 $MN^2=24^2+(MN-8)^2$, 所以 $MN=40$ cm.



27. 解: (1) 因为二次函数 $y = -\frac{4}{9}(x-1)^2 + 4$ 图像的顶点为 C , 所以点 $C(1, 4)$. 令 $y = -\frac{4}{9}(x-1)^2 + 4 = 0$, 解得 $x_1 = -2, x_2 = 4$, 所以点 $A(-2, 0), B(4, 0)$.

(2) ①6 提示: 解法 1 根据轴对称性, 得 $\frac{t+1}{2} = \frac{4+3}{2}$, 解得 $t=6$.

解法 2 设该二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$. 因为该图像经过 B, C, D 三点, 所以 $\begin{cases} 16a+4b+c=0, \\ a+b+c=4, \\ 9a+3b+c=0, \end{cases}$ 解

得 $\begin{cases} a=\frac{2}{3}, \\ b=-\frac{14}{3}, \\ c=8. \end{cases}$ 所以 $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{14}{3}x+8$. 当 $y=4$ 时, 则

$\frac{2}{3}x^2-\frac{14}{3}x+8=4$. 解得 $x_1=1, x_2=6$, 所以 $t=6$.

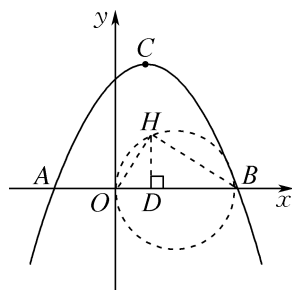
②因为点 $M(t, 4), C(1, 4)$, 所以该抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{t+1}{2}$. 因为 B, D 两点关于

对称轴对称, 点 $B(4, 0)$, 所以点 $D(t-3, 0)$. 因为点 D 在线段 OB 上, 且与端点不重合, 所以 $\begin{cases} t-3>0, \\ t-3<4. \end{cases}$ 解得 $3<t<7$. 因为 $t=4$ 时,

过 B, C, M 三点的二次函数图像不存在, 所以 $3<t<7$ 且 $t \neq 4$.

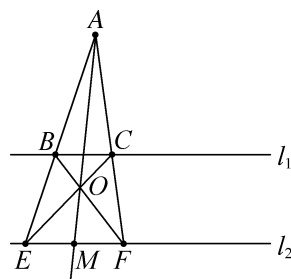
③解法 1 由②得, 点 $D(t-3, 0), 3<t<7$ 且 $t \neq 4$. 因为 $OD=t-3, DB=7-t$, 所以 $OD \cdot DB = (t-3)(7-t) = -t^2+10t-21 = -(t-5)^2+4$. 因为 $3<t<7$ 且 $t \neq 4$, 所以当 $t=5$ 时, $OD \cdot DB$ 有最大值, 最大值为 4.

解法 2 如图, 由②得, 点 $D(t-3, 0), 3<t<7$ 且 $t \neq 4$. 以 OB 为直径作圆, 过点 D 作 $DH \perp OB$, 交圆于点 H , 连接 OH, BH . 因为 OB 为直径, 所以 $\angle OHB=90^\circ$. 易证 $\triangle ODH \sim \triangle HDB$, 所以 $\frac{DH}{DB} = \frac{OD}{HD}$, 即 $DH^2 = OD \cdot DB$. 当 DH 取最大值时, $OD \cdot DB$ 有最大值, 此时 DH 为半径, D 为线段 OB 的中点, 所以点 $D(2, 0)$. 所以 $t=5$ 时, $OD \cdot DB$ 有最大值, 最大值为 4.

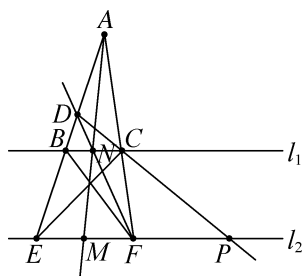


28. 解: 【实践操作】

(1) ①M 即为所求作的点. 提示: 在直线 l_1 上方任取一点 A , 连接 AE 交 l_1 于点 B , 连接 AF 交 l_1 于点 C . 连接 BF, CE 交于点 O , 连接 AO 并延长, 与 l_2 的交点 M 即为线段 EF 的中点.

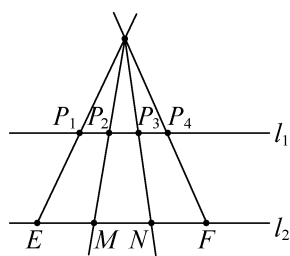


②P 即为所求作的点. 提示: 设 AM 与 l_1 的交点为 N . 连接 FN 并延长, 交 AE 于点 D . 连接 DC 并延长, 与 l_2 的交点即为 P .

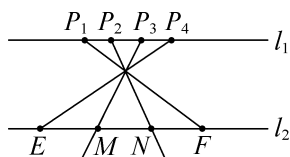


(2) M, N 即为所求作的三等分点.

作法 1:



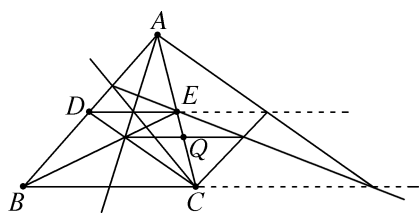
作法 2:



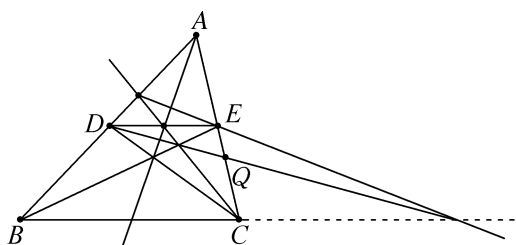
【探索发现】

(3) Q 即为所求作的点.

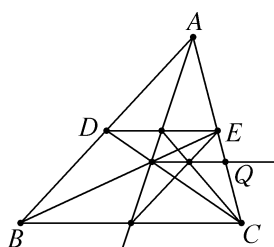
作法 1:



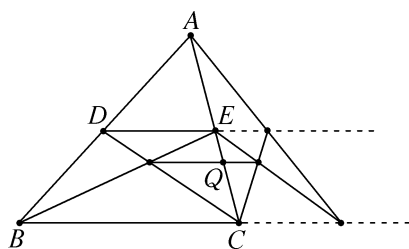
作法 2:



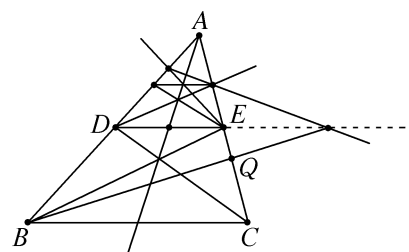
作法 3:



作法 4:



作法 5:



【解后反思】本题主要考查相似三角形的性质和判定,利用类比的数学思想和相似三角形的性质作图,理解【阅读理解】部分中 M, N 为中点是解题关键.

B13 南通市 2024 年初中毕业、升学考试

1. A 2. C 3. B 4. D 5. C 6. A

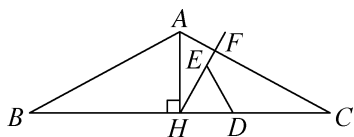
7. D 提示:因为 $y = x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2 - 2$, 所以抛物线 $y = x^2 + 2x - 1$ 的顶点坐标为 $(-1, -2)$. 将此抛物线向右平移 3 个单位长度后, 所得新抛物线的顶点坐标为 $(2, -2)$.

8. B 提示:由题意可知, 中间小正方形的边长为 $m - n$, 所以 $(m - n)^2 = 5$, 即 $m^2 + n^2 - 2mn = 5$. 因为 $(m + n)^2 = 21$, 所以 $m^2 + n^2 + 2mn = 21$. 两式相加可得 $m^2 + n^2 = 13$, 所以大正方形的面积为 $m^2 + n^2 = 13$.

9. D 提示:由图像知, 甲比乙早出发 1 h, 故 A 错误; 乙全程共用 1 h, 故 B 错误; 乙到达 2 h 后甲才到达, 故 C 错误; 甲的速度是 $20 \div 4 = 5$ (km/h), 故 D 正确.

10. C 提示:因为将线段 DH 绕点 D 顺时针旋转 2α 得到线段 DE , 所以 $DH = DE$, $\angle HDE = 2\alpha$. 当点 E 落在边 AC 上时, $\angle HDE = \angle C + \angle DEC$, 即 $2\alpha = \angle DEC + \alpha$, 所以 $\angle C = \angle DEC$. 所以 $CD = DE$, 所以 $CD = DH$, 所以 D 为线段 HC 的中点, 所以小明的发现正确. 过点 H, E 作直线交 AC 于点 F , 所以 $\angle EHD = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$. 又因为 $\angle B = \angle C = \alpha$, 所以 $\angle AFH = 90^\circ$, 所以在运动过程中, 点 E 在过点 H 垂直于 AC 的直线上运动. 当 AE 的长最小时, E 为垂足即点 F . 因为 $AH \perp BC$, $HF \perp AC$, 所以 $\angle AFH =$

$\angle AHC = 90^\circ$. 因为 $\angle HAC = \angle FAH$, 所以 $\triangle AHF \sim \triangle ACH$, 所以 $AH : AC = AF : AH$, 所以 $AH^2 = AF \cdot AC$. 因为 $AB = AC$, AF 即 AE , 所以 $AH^2 = AE \cdot AB$, 所以小丽的发现正确. 所以小明、小丽都正确.



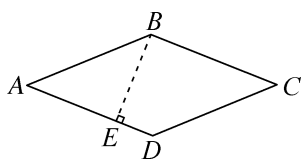
【解后反思】本题解题关键是根据 $\angle EHD$ 与 $\angle C$ 的关系得到在运动过程中, 点 E 在过点 H 垂直于 AC 的直线上运动. 再根据垂线段最短, 得到当 AE 的长最小时, E 即垂足点 F . 再根据三角形的相似可得小丽结论正确.

11. $a(x-y)$ 12. 12π

13. 0 (答案不唯一) 提示: 因为关于 x 的一元二次方程有两个不相等的实数根, 所以根的判别式 $(-2)^2 - 4k = 4 - 4k > 0$, 解得 $k < 1$. 故答案只要取 $k < 1$ 的值即可.

14. $6\sqrt{3}$ 提示: 因为 $\tan B = \frac{AC}{BC}$, 即 $\sqrt{3} = \frac{AC}{6}$, 所以 $AC = 6\sqrt{3}$ m.

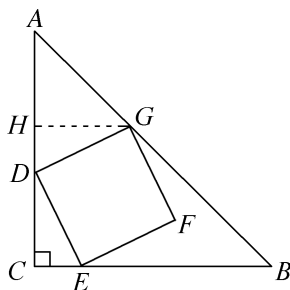
15. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 提示: 过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E . 因为周长为 20 cm, 所以 $AB = 5$ cm. 因为 $\angle A = 45^\circ$, 所以 $BE = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.



16. $R \geq 3.6$ 提示: 因为点 $(9, 4)$ 在反比例函数图像上, 所以反比例函数表达式为 $I = \frac{36}{R}$. 当 $I \leq 10$ 时, $\frac{36}{R} \leq 10$, 则 $R \geq 3.6$.

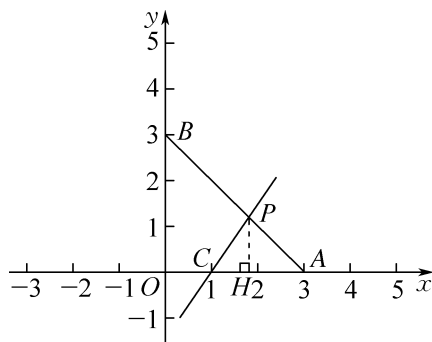
17. $3\sqrt{2}$ 提示: 如图, 过点 G 作 $GH \perp AC$ 于点 H , 则 $\angle AHG = 90^\circ$. 设 $AH = x$, 因为 $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 5$, 所以 $\angle A = 45^\circ$, $AB = \sqrt{2} AC = 5\sqrt{2}$, 所以 $HG = AH = x$. 因为四边形 $DEFG$ 是正方形, 所以 $DG = ED$, $\angle GDE = 90^\circ$, 所以 $\angle GDH = 90^\circ - \angle EDC = \angle DEC$, 所以 $\triangle DGH \cong \triangle EDC$ (AAS), 所以 $DC = GH = x$, 所以 $DH = 5 - 2x$. 因为 $DE = \sqrt{5}$, 在 $\text{Rt}\triangle DGH$ 中, 由勾股定理, 可得 $x^2 + (5 - 2x)^2 =$

$(\sqrt{5})^2$, 解得 $x = 2$. 所以 $AH = 2$, 所以 $AG = \sqrt{2} AH = 2\sqrt{2}$, 所以 $BG = AB - AG = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.



【解后反思】本题是典型的一线三垂直模型, 利用 $DG = DE$, $DG \perp DE$, 构造 $\triangle DGH \cong \triangle EDC$. 再结合勾股定理进行求解.

18. $\frac{3}{5}$ 提示: 如图, 因为直线 $y = kx + b$ 的一次项系数 $k > 0$, 且直线经过点 $(1, 0)$, 故直线必定经过一、三、四象限. 设直线与线段 AB 交于点 P , 点 $C(1, 0)$. 因为 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$, 靠近原点部分的面积为 $\frac{15}{4}$, 所以远离原点部分的面积即 $S_{\triangle APC} = \frac{9}{2} - \frac{15}{4} = \frac{3}{4}$. 过点 P 作 $PH \perp AC$ 于点 H . 因为 $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} AC \cdot PH = \frac{3}{4}$, 所以 $PH = \frac{3}{4}$. 因为 $\angle BAC = 45^\circ$, 所以 $AH = PH = \frac{3}{4}$, 所以 $OH = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$, 故点 $P(\frac{9}{4}, \frac{3}{4})$. 将 P, C 两点坐标代入 $y = kx + b$, 得 $\begin{cases} k + b = 0, \\ \frac{9}{4}k + b = \frac{3}{4}, \end{cases}$ 解得 $k = \frac{3}{5}$.



【解后反思】本题关键是抓住题目中核心条件: 过点 $(1, 0)$, $k > 0$, 从而得出直线必与线段 AB 相交, 得到远离原点部分的面积即 $\triangle APC$ 的面积.

19. 解: (1) 原式 $= m^2 - 2m - m^2 - m = -3m$.
(2) 去分母, 得 $3x - (3x + 3) = 2x$, 去括号,

得 $3x - 3x - 3 = 2x$, 解得 $x = -\frac{3}{2}$. 经检验,

$x = -\frac{3}{2}$ 是原方程的解.

20. 解: (1) 20 15 (2) B (3) 该小区去年月均用水量小于 4.8 t 的家庭数有 $1\ 200 \times \frac{27}{50} = 648$ (个).

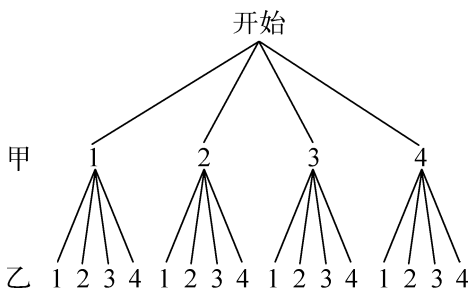
21. 证明: 因为 E 是 AC 的中点, 所以 $AE = CE$. 在

$\triangle ADE$ 和 $\triangle CFE$ 中, $\begin{cases} AE = CE, \\ \angle AED = \angle CEF, \\ DE = FE, \end{cases}$ 所

以 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$ (SAS). 所以 $\angle ADE = \angle CFE$, 所以 $CF \parallel AB$.

22. 解: (1) $\frac{1}{4}$

(2) 画树状图如下:



由树状图可知, 共有 16 种等可能的情况, 其中甲、乙两人在同一出入口开展志愿服务活动有 4 种情况, 所以 $P(\text{甲、乙两人在同一出入口开展志愿服务活动}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

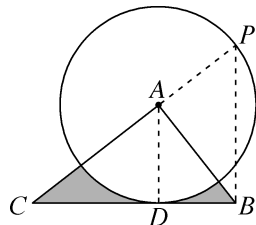
23. 解: (1) 连接 AD . 因为 $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$, 所以 $AC^2 + AB^2 = BC^2$, 所以 $\angle BAC = 90^\circ$, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$. 因为 $\odot A$ 与 BC 相切于点 D , 所以 $AD \perp BC$. 因为 $\frac{1}{2} BC \cdot AD = 6$, 所以 $AD = \frac{12}{5}$. 所以

$$S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ABC} - S_{\text{扇形}} = 6 - \frac{90^\circ \times \pi \times \left(\frac{12}{5}\right)^2}{360^\circ} = 6 - \frac{36}{25}\pi.$$

- (2) 如图, 当 CP 的长最大时, CP 过圆心 A ,

则 $\angle PAB = 90^\circ$. 因为 $AP = AD = \frac{12}{5}$, $AB =$

3, 所以 $BP = \sqrt{AP^2 + AB^2} = \frac{3\sqrt{41}}{5}$.



24. 解: (1) 设 A 型智能机器人的单价为 x 万元, B 型智能机器人的单价为 y 万元. 根据题意,

$$\begin{cases} x + 3y = 260, \\ 3x + 2y = 360, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 80, \\ y = 60. \end{cases}$$

答: A 型智能机器人的单价为 80 万元, B 型智能机器人的单价为 60 万元.

(2) 设购买 A 型智能机器人 a 台, 则购买 B 型智能机器人 $(10 - a)$ 台. 根据题意, 得 $80a + 60(10 - a) \leq 700$, 解得 $a \leq 5$. 每天分拣快递的件数为 $22a + 18(10 - a) = 4a + 180$. 因为 $4 > 0$, 所以每天分拣快递的件数随 a 的增大而增大. 所以当 $a = 5$ 时, 每天分拣快递的件数最多, 最多为 200 万件, 所以选择购买 A 型智能机器人 5 台, 购买 B 型智能机器人 5 台.

25. 解: (1) 若 $a = -1$, $b = 3$, 则 $y = (x + 1)^2 + (x - 3)^2 = 2x^2 - 4x + 10 = 2(x - 1)^2 + 8$. 因为 $2 > 0$, 所以当 $x = 1$ 时, y 取得最小值, 所以 $x_0 = 1$.

(2) 因为点 $P(a, b)$ 在双曲线 $y = -\frac{2}{x}$ 上, 所以

$b = -\frac{2}{a}$, 所以 $y = (x - a)^2 + \left(x + \frac{2}{a}\right)^2 =$

$2x^2 - \left(2a - \frac{4}{a}\right)x + a^2 + \frac{4}{a^2}$. 因为 $x_0 =$

$-\frac{\left(2a - \frac{4}{a}\right)}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$, 解得 $a_1 = 2, a_2 = -1$. 当

$a = 2$ 时, 点 P 到 y 轴的距离为 2; 当 $a = -1$ 时, 点 P 到 y 轴的距离为 1. 综上所述, 点 P 到 y 轴的距离为 2 或 1.

(3) 因为 $a^2 - 2a - 2b + 3 = 0$, 所以 $b = \frac{a^2 - 2a + 3}{2}$, $y = (x - a)^2 + (x - b)^2 = 2x^2 - 2(a + b)x + a^2 + b^2$. 由题意, 得 $x_0 = \frac{a + b}{2} = \frac{a^2 + 3}{4}$. 因为 $1 \leq x_0 < 3$, 所以 $1 \leq \frac{a^2 + 3}{4} < 3$, 整理, 得 $1 \leq a^2 < 9$. 因为 a 为整数, 所以 a 能取 -2 或 -1 或 1 或 2 , 共 4 个.

【解后反思】 本题解题的关键是利用二次函数的最值性质, 即当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, 函数有最值, 从而得到 x_0 的表达式.

26. 解: (1) $\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \frac{4}{3} \quad AB + AC = 2\cos \alpha \cdot AB \cdot AC$ 提示: 如图 1, 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AB = \frac{AD}{\cos \angle BAD} = \frac{1}{\cos \alpha}$, 所以 $AB + AC = \frac{2}{\cos \alpha}$, $AB \cdot AC = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, 所以 $AB + AC = 2\cos \alpha \cdot AB \cdot AC$.

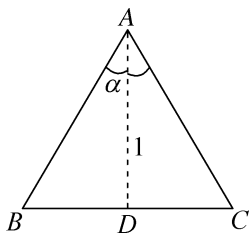


图 1

(2) $AB + AC = \sqrt{3} AB \cdot AC$.

证明: 如图 2, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , $DF \perp AC$ 于点 F , 过点 C 作 $CG \perp AB$ 于点 G . 在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中, $DE = AD \cdot \sin \angle BAD$. 在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中, $DF = AD \cdot \sin \angle CAD$. 在 $\text{Rt}\triangle ACG$ 中, $CG = AC \cdot \sin \angle BAC$. 因为 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$, 所以 $\frac{1}{2} AB \cdot CG = \frac{1}{2} AB \cdot DE + \frac{1}{2} AC \cdot DF$, 即 $\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD + \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD$, 所以 $AB + AC =$

$\frac{\sin \angle BAC}{AD \cdot \sin \angle BAD} AB \cdot AC$. 因为 $\angle BAC = 60^\circ$, $AD = 1$, 所以 $AB + AC = \frac{\sin 60^\circ}{1 \times \sin 30^\circ} AB \cdot AC$, 所以 $AB + AC = \sqrt{3} AB \cdot AC$.

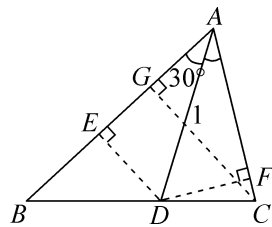


图 2

(3) 补全图形如图 3 所示. 设 $\angle A = \beta$, 则 $\angle ABD = \angle A = \beta$, 所以 $\angle BDC = 2\beta$. 因为 $BD = BC$, 所以 $\angle BCD = \angle BDC = 2\beta$. 因为 $AB = AC$, 所以 $\angle ABC = \angle ACB = 2\beta$. 所以 $\beta + 2\beta + 2\beta = 180^\circ$, 解得 $\beta = 36^\circ$, 所以 $\angle A = \angle ABD = \angle CBD = 36^\circ$, 所以 $\angle ABC = \angle ACB = \angle BDC = 72^\circ$. 易证 $\triangle BDC \sim \triangle ABC$, 所以 $BC : AC = DC : BC$, 所以 $BC^2 = CD \cdot AC$. 设 $CD = x$, 则 $BC = AD = 1 - x$. 所以 $(1 - x)^2 = x \cdot 1$, 解得 $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. 因为 $AC = 1$, 所以 $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1$ 不符合题意. 所以 $CD = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$. 因为 $CE = CD$, 所以 $\angle DEC = \angle BDC = 72^\circ$. 因为 $\angle CBD = 36^\circ$, 所以 $\angle ECB = 36^\circ$, 所以 $BE = CE = CD = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$. 由第 (2) 小问的解题过程可得 $BM + BN = \frac{\sin \angle MBN}{BE \cdot \sin \angle CBD} BM \cdot BN$, 所以 $BM + BN = \frac{\sin 72^\circ}{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \times \sin 36^\circ} BM \cdot BN$, 两边同时除以 $BM \cdot BN$, 得 $\frac{1}{BM} + \frac{1}{BN} = \frac{\sin 72^\circ}{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \sin 36^\circ}$. 因为 $\sin 36^\circ$ 和 $\sin 72^\circ$ 为定值, 所以 $\frac{1}{BM} + \frac{1}{BN}$ 为定值.

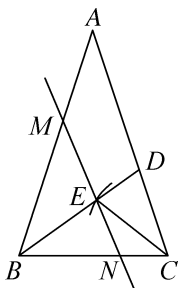


图 3

【解后反思】本题由一些特殊的角度时,两腰之和 $AB+AC$ 与两腰之积 $AB \cdot AC$ 的关系,猜想并证明了一般情况下的规律即三角形角平分线的一个结论:在 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, $\angle BAD = \alpha$, 则 $AB+AC = \frac{\sin 2\alpha}{AD \cdot \sin \alpha} AB \cdot AC$; 再运用这个结论解决第(3)小问,在 $\triangle BMN$ 中, BE 平分 $\angle MBN$, 因此可以直接运用结论,得到 BM 与 BN 的关系式. 体现了数学从特殊到一般,再根据规律解决问题的思想.

B14* 盐城市 2024 年初中学业与升学考试

1. B 2. C 3. A 4. D 5. C 6. B 7. C

8. A 提示:由折线统计图可知,甲公司 2019~2023 年利润增长约 110 万元,增长率约为 $\frac{110}{100} \times 100\% = 110\%$; 乙公司 2019~2023 年利润增长 40 万元,增长率为 $\frac{40}{120} \times 100\% \approx 33.3\%$. 两家公司利润均平缓稳定增长,所以甲始终比乙快.

【解后反思】两个折线统计图的纵轴单位长度不一样,因此不能简单由直观得出结论,要进行定量分析比较.

9. $x \neq 1$ 10. $(x+1)^2$ 11. $\frac{1}{2}$ 12. 50

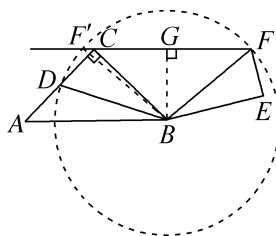
13. 20π

14. 15 提示:设绳索长 x 尺,竿子长 y 尺. 根据题意,得

$$\begin{cases} x = y + 5, \\ \frac{x}{2} = y - 5, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = 20, \\ y = 15. \end{cases} \text{故竿子长为 15 尺.}$$

15. 17 提示:延长 AB 交直线 PQ 于点 H , 则 $\angle PHA = 90^\circ$. 由题意知 $AH = 30$ m, 在 $\text{Rt}\triangle PHA$ 中, $PH = \frac{AH}{\tan \angle HPA} = \frac{30}{\tan 37^\circ} \approx 40$ (m), 所以 $QH = PH - PQ = 40 - 26.6 = 13.4$ (m). 因为 $\angle PHA = 90^\circ$, $\angle HQB = 45^\circ$, 所以 $\angle QBH = 45^\circ$, 所以 $BH = QH = 13.4$ m, 所以 $AB = AH - BH = 30 - 13.4 = 16.6 \approx 17$ (m).

16. $2+\sqrt{6}$ 或 $\sqrt{6}-2$ 提示:如图,过点 B 作 $BG \perp CF$ 于点 G . 因为 $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 2\sqrt{2}$, D 是 AC 的中点, 所以 $CD = \sqrt{2}$, $\angle ABC = 45^\circ$. 所以 $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}$, 由旋转的性质可知, $\triangle DCB \cong \triangle FEB$, 所以 $BD = BF = \sqrt{10}$. 因为 $CF \parallel AB$, 所以 $\angle ABC = \angle BCG = 45^\circ$, 所以 $CG = BC \cdot \cos \angle BCG = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$, 所以 $BG = \sqrt{BC^2 - CG^2} = 2$, 所以 $CF = \sqrt{BF^2 - BG^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 2^2} = \sqrt{6}$, 所以 $CF = CG + GF = 2 + \sqrt{6}$. 当点 D 运动点 F' 时, 此时 $CF' \parallel AB$, 同理可得, $CF' = \sqrt{6}$, $CG = 2$, 所以 $CF' = \sqrt{6} - 2$. 综上所述, $CF = 2 + \sqrt{6}$ 或 $CF = \sqrt{6} - 2$.



【解后反思】通过作辅助线将 CF 放入两个直角三角形中, 转化为 $CG + FG$, 这是解题关键.

17. 解: 原式 $= 2 - 1 + 4 \times \frac{1}{2} = 3$.

18. 解: 去分母, 得 $1+x \geq 3(x-1)$, 去括号, 得 $1+x \geq 3x-3$, 移项, 得 $x-3x \geq -3-1$, 合并同类项, 得 $-2x \geq -4$, 系数化为 1, 得 $x \leq 2$, 所以原不等式的正整数解为 1, 2.

19. 解: 原式 $= 1 - \frac{a-3}{a} \cdot \frac{a(a+1)}{(a+3)(a-3)} = 1 - \frac{a+1}{a+3} = \frac{a+3-a-1}{a+3} = \frac{2}{a+3}$. 当 $a=4$ 时, 原式 $= \frac{2}{4+3} = \frac{2}{7}$.

20. 解: (1) $\frac{1}{3}$

(2) 列表如下:

基地	A	B	C
A	(A,A)	(A,B)	(A,C)
B	(B,A)	(B,B)	(B,C)
C	(C,A)	(C,B)	(C,C)

共有 9 种等可能的结果,其中小明和小丽选择到相同基地的结果有 3 种,所以 $P(\text{小明和小丽选择相同基地}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

21. 解: 选择①,理由如下:因为 $AE \parallel BF, CE \parallel DF$,所以 $\angle A = \angle FBD, \angle D = \angle ECA$. 因为 $AE = BF$,所以 $\triangle AEC \cong \triangle BFD (AAS)$,所以 $AC = BD$,所以 $AC - BC = BD - BC$,即 $AB = CD$.

选择②,无法证明 $\triangle AEC \cong \triangle BFD$,无法得出 $AB = CD$.

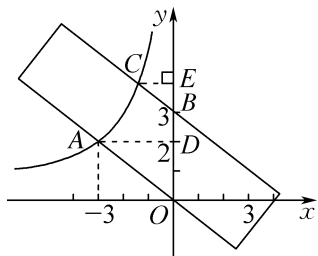
选择③,理由如下:因为 $AE \parallel BF$,所以 $\angle A = \angle FBD$. 因为 $AE = BF, \angle E = \angle F$,所以 $\triangle AEC \cong \triangle BFD (ASA)$,所以 $AC = BD$,所以 $AC - BC = BD - BC$,即 $AB = CD$.

22. 解: (1) 由图可知点 A 的坐标为 $(-3, 2)$,设反比例函数的表达式为 $y = \frac{k}{x}$,将点 $(-3, 2)$ 代入,得 $2 = \frac{k}{-3}$,解得 $k = -6$,所以反比例函数的表达式为 $y = -\frac{6}{x}$.

(2) 如图,过点 C 作 $CE \perp y$ 轴于点 E,过点 A 作 $AD \perp y$ 轴于点 D. 易得 $AD = 3, OD = 2$.

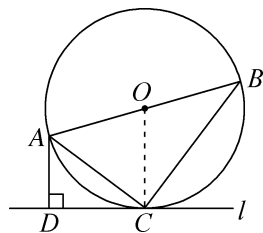
2. 设点 C 的坐标为 $(m, -\frac{6}{m})$,则 $CE = -m, OE = -\frac{6}{m}$,所以 $BE = OE - OB = -\frac{6}{m} - 3$. 因为矩形直尺对边平行,所以 $\angle CBE = \angle AOD$,所以 $\tan \angle CBE = \tan \angle AOD$,所以 $\frac{CE}{BE} = \frac{AD}{OD}$,即 $\frac{-m}{-\frac{6}{m} - 3} = \frac{3}{2}$,解得 $m = -\frac{3}{2}$ 或 $m = 6$. 因为

点 C 在第二象限,所以 $m = -\frac{3}{2}, -\frac{6}{m} = 4$,所以点 C 的坐标为 $(-\frac{3}{2}, 4)$.



【解后反思】在矩形背景下,如何由点 A 的坐标信息,处理点 C 的信息是解题关键. 本题存在多个等量关系,如 A, C 两点均在反比例函数图像上,又可挖掘相似或三角函数产生线段之间的等量关系,因此方程思想是解题基本策略.

23. (1) 证明: 如图,连接 OC. 因为 CD 是 $\odot O$ 的切线,点 C 在以 AB 为直径的 $\odot O$ 上,所以 $\angle OCD = \angle OCA + \angle ACD = 90^\circ, \angle ACB = \angle OCA + \angle OCB = 90^\circ$,所以 $\angle ACD = \angle OCB$. 因为 $OC = OB$,所以 $\angle OBC = \angle OCB$,所以 $\angle ACD = \angle ABC$. 因为 $AD \perp l$,所以 $\angle ADC = 90^\circ$,所以 $\angle ADC = \angle ACB$,所以 $\triangle ABC \sim \triangle ACD$.



(2) **解:** 因为 $AC = 5, CD = 4$,由勾股定理,得 $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = 3$. 因为 $\triangle ABC \sim \triangle ACD$,所以 $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$,即 $\frac{AB}{5} = \frac{5}{3}$,所以 $AB = \frac{25}{3}$,所以 $\odot O$ 的半径为 $\frac{25}{6}$.

24. 解: (1) 800 7 200

(2) $\frac{320 + 280 + 120}{800} \times 100\% = 90\%$,12 月份

“每天阅读时间不少于 1 h”的比例为 $1 - 5\% = 95\%$. 设 9 月份学生和 12 月份学生样本容量均为 x ,所以 $95\%x - 90\%x = 5\%x$,所以增长率为 $\frac{5\%x}{90\%x} \times 100\% \approx 5.56\%$.

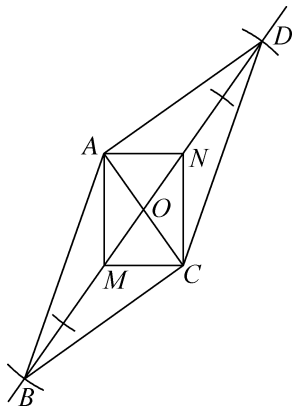
(3) 该地区出台相关激励措施有明显的作用,督促大部分学生养成良好的阅读习惯(答案不唯一).

25. (1) 证明: 因为四边形 ABCD 是平行四边形,所以 $AB \parallel CD, AD \parallel BC, AB = CD, AD = BC$. 因为 E, F, G, H 分别是平行四边形 ABCD 各边的中点,所以 $AE = \frac{1}{2}AB =$

$\frac{1}{2}CD=CG$, $AE \parallel CG$, 所以四边形 $AECG$ 为平行四边形. 同理可得, 四边形 $AFCH$ 为平行四边形, 所以 $AM \parallel CN$, $AN \parallel CM$, 所以四边形 $AMCN$ 是平行四边形.

(2) ① $AC \perp BD$

② 如图所示, $\square ABCD$ 即为所求.



提示: 连接 AC , 作直线 MN , 与 AC 交于点 O , 由“中顶点四边形”定义, 可知点 M, N 分别为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACD$ 的重心, 所以作 $ND=2ON$, $MB=2OM$ (或作 $BM=MN=ND$), 然后连接 AB, BC, CD, DA 即可.

26. 解: 任务 1: 根据题意, 加工“雅”服装的有 x 人, 加工“风”服装的有 y 人, 所以加工“正”服装的有 $(70-x-y)$ 人. 因为“正”服装总件数和“风”服装相等, 所以 $(70-x-y) \times 1 = 2y$, 整理, 得 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{70}{3}$ ($10 \leq x \leq 70$).

任务 2: 根据题意, 得“雅”服装每天获利为 $x[100-2(x-10)]$ 元, 所以 $w = 2y \times 24 + (70-x-y) \times 48 + x[100-2(x-10)]$, 整理, 得 $w = -2x^2 + 72x + 3\,360$ ($10 \leq x \leq 70$).

任务 3: 由任务 2, 得 $w = -2x^2 + 72x + 3\,360 = -2(x-18)^2 + 4\,008$, 所以当 $x = 18$ 时, 获得最大利润, 此时 $y = -\frac{1}{3} \times 18 + \frac{70}{3}$

$\frac{70}{3} = \frac{52}{3}$, 不符合题意. 因为二次函数图像开口向下, 所以取 $x = 17$ 或 $x = 19$. 当 $x = 17$ 时, $y = \frac{53}{3}$, 不符合题意; 当 $x = 19$ 时, $y = 17$, 符合题意. 所以 $70-x-y = 34$. 综上所述, 安排 19 名工人加工“雅”服装, 17 名工人

加工“风”服装, 34 名工人加工“正”服装, 即可获得最大利润.

27. 解: 【分析问题】

方案 1: $(n-1)d \quad 2k \quad 2(n-1)dk$

方案 2: $2(k-1)dn$

方案 3: 由图可知, 斜着铲每两个点之间的单位距离为 $\frac{\sqrt{d^2+d^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}d}{2}$. 根据题意得一共有 $2n$ 列, $2k$ 行, 斜着铲相当于有 n 条线段, 每条线段有 $(2k-1)$ 个单位距离, 所以铲除全部籽的路径总长为 $\frac{\sqrt{2}}{2} \times (2k-1)nd$.

【解决问题】

由上, 得 $2(n-1)dk - 2(k-1)dn = 2ndk - 2dk - 2ndk + 2dn = 2d(n-k) > 0$, 所以方案 1 的铲籽路径总长大于方案 2 的铲籽路径总长;

$2(k-1)dn - \frac{\sqrt{2}}{2} \times (2k-1)dn = \left[(2 - \sqrt{2})k - 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] dn$, 因为 $n > k \geq 3$, 当 $k =$

3 时, $(2 - \sqrt{2}) \times 3 - 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 - \frac{5\sqrt{2}}{2} > 0$, 所以

$2(k-1)dn - \frac{\sqrt{2}}{2} \times (2k-1)dn > 0$, 所以方案 3 的铲籽路径总长最短. 销售员的操作方法是选择最短的路径, 减少对菠萝的损耗.

【解后反思】要准确理解题意. 本题将菠萝近似看成圆柱体, 并忽略籽的体积和铲去果肉的厚度与宽度, 将籽在侧面展开图上可以看成点, 是解题关键. 要善于用数学的眼光看问题. 要逐一分析三类方案中相邻两粒之间的间距, 计算方法不同, 特别是方案 3, 斜着铲每两个点之间的距离为 $\frac{\sqrt{d^2+d^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}d}{2}$. 比较大小的常规途径是作差法.

B15 扬州市 2024 年初中毕业升学考试

1. D 2. C 3. B 4. B 5. D 6. C 7. B

8. D 提示: 这一列数为 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..., 可以发现每 3 个数为一组, 每一组前 2 个数为奇数, 第 3 个数为偶数. 由于 $2\,024 \div 3 = 674 \dots 2$, 即前 2 024 个数共有 674 组, 且余 2 个数, 所以奇数有

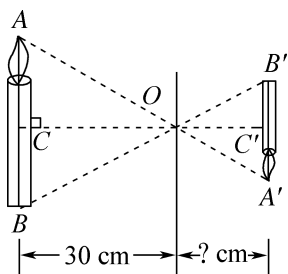
$$674 \times 2 + 2 = 1\,350 (\text{个}).$$

【方法总结】这是一类有“循环节”的找数字规律的试题,通过观察,由于“奇+奇=偶”“奇+偶=奇”“偶+偶=偶”,从而判断其为“3数一组”的循环节.还有的数字规律题可以尝试计算每个数与前一个数的差异、比率或乘积,看是否能找到递增或递减的规律.

9. 1.87×10^7 10. $2(a-1)^2$ 11. 0.53

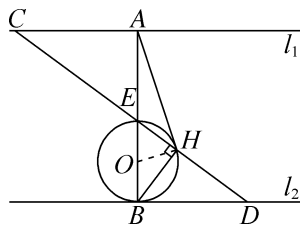
12. $x \geq 2$ 13. 5 14. $x = -2$ 15. 2.5

16. 20 提示:由题意可知, $AB \parallel A'B'$, 所以 $\triangle AOB \sim \triangle A'OB'$. 如图,过点 O 作 $OC \perp AB$ 于点 C , CO 的延长线交 $A'B'$ 于点 C' , 所以 $OC' \perp A'B'$, $OC = 30$ cm, 所以 $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OC'}{OC}$, 即 $\frac{24}{36} = \frac{OC'}{30}$, 所以 $OC' = 20$ cm.



17. $2\sqrt{3}$ 提示:过点 D 作 $DE \perp x$ 轴于点 E . 因为点 A 的坐标为 $(1, 0)$, 所以 $OA = 1$. 因为 $\angle BAC = 30^\circ$, $BC \perp x$ 轴, 设 $BC = a$, 则 $AD = AC = \sqrt{3}a$. 由对称可知 $\angle DAB = \angle BAC = 30^\circ$, 所以 $\angle DAC = 60^\circ$, $\angle ADE = 30^\circ$, 所以 $AE = \frac{1}{2}AD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $DE = \frac{3}{2}a$, 所以点 $B(1 + \sqrt{3}a, a)$, $D(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{3}{2}a)$. 因为点 B 和点 D 均在该反比例函数的图像上, 所以 $k = a(1 + \sqrt{3}a) = \frac{3}{2}a \cdot (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}a)$, 解得 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 因为反比例函数的图像在第一象限, 所以 $k = 2\sqrt{3}$.

18. $\frac{1}{3}$ 提示: 因为 $l_1 \parallel l_2$, 所以 $\angle ACE = \angle BDE$, $\angle CAE = \angle DBE$. 因为 $AC = BD$, 所以 $\triangle ACE \cong \triangle BDE$ (ASA), 所以 $BE = AE = \frac{1}{2}AB$. 因为 $BH \perp CD$, 所以 $\angle BHE = 90^\circ$, 所以点 H 在以 BE 为直径的圆上运动. 如图, 取线段 BE 的中点 O , 以点 O 为圆心, OB 长为半径画圆, 则点 H 在 $\odot O$ 上运动, 所以当 AH 与 $\odot O$ 相切时 $\angle BAH$ 最大, 所以 $OH \perp AH$. 因为 $AE = BE = 2OE$, 所以 $AO = AE + OE = 3OE$. 因为 $OH = OE$, 所以 $\sin \angle BAH = \frac{OH}{AO} = \frac{OE}{3OE} = \frac{1}{3}$.



【方法总结】有关张角最大问题,通常与圆有关,诸如“圆外角小于圆周角”“圆内角大于圆周角”“同弧所对的圆周角相等”等等,直线与圆相切是最值问题的临界情形,与此类似的有“广告最佳视角”“足球射门最佳角”等.

19. 解: (1) 原式 $= \pi - 3 + 2 \times \frac{1}{2} - 1 = \pi - 3$.

(2) 原式 $= \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x+1}$.

20. 解: 解 $2x - 6 \leq 0$, 得 $x \leq 3$. 解 $x < \frac{4x-1}{2}$, 得 $x > \frac{1}{2}$, 所以原不等式组的解集为 $\frac{1}{2} < x \leq 3$. 所以所有整数解为 1, 2, 3, 其和为 $1 + 2 + 3 = 6$.

21. 解: (1) 20 C 组人数为 $200 \times 20\% = 40$, 补全条形统计图略.

(2) D

(3) $1\,200 \times 25\% = 300$ (人).

答: 估计该校 1 200 名学生中成绩在 90 分以上(包括 90 分)的人数为 300.

22. 解: (1) $\frac{1}{5}$

(2) 列表如下:

景区	C	D	E
C	(C,C)	(C,D)	(C,E)
D	(D,C)	(D,D)	(D,E)
E	(E,C)	(E,D)	(E,E)

由表可知, 共有 9 种等可能的结果, 其中小明和小亮选到相同景区的结果有 3 种, 所以 $P(\text{小明和小亮选到相同景区}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

23. 解: 设 B 型机器每天处理 x t 垃圾, 则 A 型机器每天处理 $(x + 40)$ t 垃圾. 根据题意, 得 $\frac{500}{x+40} = \frac{300}{x}$, 解得 $x = 60$. 经检验, $x = 60$ 是所列方程的解.

答:B型机器每天处理 60 t 垃圾.

24. 解:(1) 四边形 $ABCD$ 是菱形. 理由如下:

如图 1, 过点 A 作 $AE \perp CB$, 交 CB 的延长线于点 E , 过点 C 作 $CF \perp AB$, 交 AB 的延长线于点 F , 则 $AE = CF$. 由题意, 得 $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$, 所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 因为 $AE = CF$, $\angle AEB = \angle CFB = 90^\circ$, $\angle ABE = \angle CBF$, 所以 $\triangle AEB \cong \triangle CFB$ (AAS), 所以 $AB = CB$, 所以平行四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2) 如图 2, 过点 A 作 $AG \perp CD$, 交 CD 的延长线于点 G . 则 $AG = 2$ cm. 因为 $S_{\text{四边形}ABCD} = CD \cdot AG = 8 \text{ cm}^2$, 所以 $CD = 4$ cm. 由(1)可知, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $AD = CD = 4$ cm, 在 $\text{Rt}\triangle AGD$ 中, 由 $\sin \angle 1 = \frac{AG}{AD} = \frac{1}{2}$, 得 $\angle 1 = 30^\circ$.

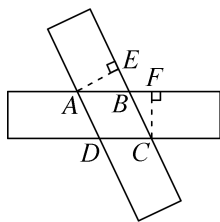


图 1

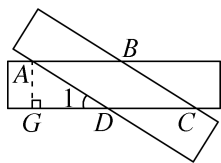


图 2

25. 解:(1) 将点 $A(-2, 0)$, $B(1, 0)$ 代入二次函数 $y = -x^2 + bx + c$, 得 $\begin{cases} -4 - 2b + c = 0, \\ -1 + b + c = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b = -1, \\ c = 2. \end{cases}$

(2) 由(1)可知, 二次函数的表达式为 $y = -x^2 - x + 2$. 因为点 $A(-2, 0)$, $B(1, 0)$, 所以 $AB = 1 - (-2) = 3$. 设点 $P(m, n)$, 所以 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} AB \cdot |n| = 6$, 所以 $|n| = 4$, 所以 $n = \pm 4$. 所以当 $-x^2 - x + 2 = 4$, 即 $x^2 + x + 2 = 0$ 时, 根的判别式为 $1 - 8 = -7 < 0$, 方程无解; 当 $-x^2 - x + 2 = -4$, 即 $x^2 + x - 6 = 0$ 时, 解得 $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. 所以点 P 的坐标为 $(2, -4)$ 或 $(-3, -4)$.

26. 解:(1) 如图 1, 点 O 即为所求. 提示: 作 $\angle ACO = \angle CAQ$, 交射线 AQ 于点 O . 此题还可以作

线段 AC 的垂直平分线交射线 AQ 于点 O .

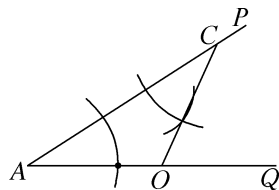


图 1

(2) 如图 2, 点 M 即为所求. 提示: 连接 BC , 以点 B 为圆心, BC 长为半径画弧交射线 AQ 于点 D , 过点 D 作 $DM \perp AQ$, 交射线 AP 于点 M , 连接 BM . 因为 AB 为直径, 所以 $\angle ACB = 90^\circ$, 即 $BC \perp AP$. 由作图可知, $BC = BD$, $DM \perp AQ$. 又因为 $BM = BM$, 所以 $\text{Rt}\triangle BCM \cong \text{Rt}\triangle BDM$ (HL), 所以 $CM = DM$, 即点 M 到点 C 的距离与点 M 到射线 AQ 的距离相等.

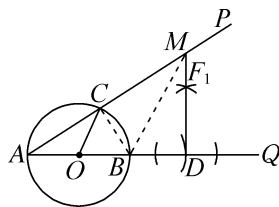


图 2

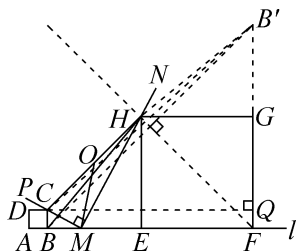
(3) 由(2)可知, $DM = CM = 12$, $DM \perp AQ$.

在 $\text{Rt}\triangle ADM$ 中, 由 $\sin A = \frac{DM}{AM} = \frac{3}{5}$, 得 $AM = 20$. 所以 $AC = AM - CM = 8$. 因为 AB 是直径, 所以 $\angle ACB = 90^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$. 设 $BC = 3x$, 则 $AB = 5x$. 由勾股定理, 得 $(5x)^2 = (3x)^2 + 8^2$, 解得 $x = 2$ (负值已舍), 所以 $BC = 3x = 6$. 在 $\text{Rt}\triangle BCM$ 中, 由勾股定理, 得 $BM = \sqrt{CM^2 + BC^2} = 6\sqrt{5}$.

27. 解:(1) 设 $BM = x$, 则 $EM = 10 - x$. 因为四边形 $ABCD$ 、四边形 $EFGH$ 都是正方形, 所以 $\angle ABC = \angle CBM = 90^\circ$, $\angle HEF = \angle MEH = 90^\circ$, $BC = AB = 2$, $EH = EF = 12$, 所以 $\angle CBM = \angle MEH$, $\angle BCM + \angle CMB = 90^\circ$. 因为 $\angle PMN = 90^\circ$, 所以 $\angle EMH + \angle CMB = 90^\circ$, 所以 $\angle BCM = \angle EMH$, 所以 $\triangle BCM \sim \triangle EMH$, 所以 $\frac{BC}{EM} = \frac{BM}{EH}$, 即 $\frac{2}{10-x} = \frac{x}{12}$, 解得 $x = 6$ 或 $x = 4$. 所以 $BM = 6$ 或 $BM = 4$.

(2) 设 $BM=x$, 则 $EM=10-x$. 同(1)可证 $\triangle BCM \sim \triangle EMH$, 所以 $\frac{BC}{EM} = \frac{BM}{EH}$, 即 $\frac{2}{10-x} = \frac{x}{EH}$, 所以 $EH = -\frac{1}{2}x^2 + 5x = -\frac{1}{2}(x-5)^2 + 12.5$, 所以当 $BM=5$ 时, EH 有最大值, 最大值为 12.5.

(3) $2\sqrt{221}$ 提示: 如图, 连接 FH , 作点 B 关于 FH 的对称点 B' , 连接 $B'C, B'H$, 过点 C 作 $CQ \perp FG$ 于点 Q . 因为四边形 $EFGH$ 是正方形, 所以 $\angle HFE = 45^\circ$, 即点 H 在对角线 FH 所在直线上运动, 由轴对称的性质, 得 $B'F=BF=22, B'H=BH$, 且 B', G, Q 三点共线. 因为 $\angle CMH = 90^\circ, O$ 是 CH 的中点, 所以 $CH=2OM$, 所以 $2OM+BH=CH+BH=CH+B'H \geq B'C$. 所以当 C, H, B' 三点共线时, $2OM+BH$ 有最小值, 最小值为 $B'C$ 的长. 易证四边形 $BFQC$ 为矩形, 所以 $FQ=BC=2, CQ=BF=22$, 所以 $B'Q=B'F-FQ=20$. 所以在 $Rt\triangle CB'Q$ 中, 由勾股定理, 得 $B'C=\sqrt{CQ^2+B'Q^2}=2\sqrt{221}$, 所以 $2OM+BH$ 的最小值为 $2\sqrt{221}$.



28. 解: (1) $AD-BD=CD$

(2) $AD-BD=CD$. 理由如下:

如图 1, 在 AD 上截取 $DF=BD$, 连接 BF . 由同弧所对的圆周角相等, 得 $\angle ADB = \angle ACB = 60^\circ$. 所以 $\triangle DBF$ 是等边三角形, 所以 $BF=BD=DF, \angle DBF=60^\circ$. 因为 $CA=CB, \angle ACB=60^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 所以 $AB=CB, \angle ABC=60^\circ$. 所以 $\angle ABC - \angle CBF = \angle DBF - \angle CBF$, 即 $\angle ABF = \angle CBD$, 所以 $\triangle AFB \cong \triangle CDB$ (SAS). 所以 $AF=CD$, 所以 $AD-BD=AD-DF=AF=CD$.

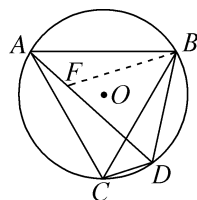


图 1

(3) 当点 D 在 $\widehat{BC}$ 上时, $2CD \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = AD - BD$; 当点 D 在 $\widehat{AB}$ 上时, $2CD \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = AD + BD$.

提示: 因为 $AD > BD$, 所以点 D 在 $\widehat{BC}$ 或 $\widehat{AB}$ 上, 分情况讨论: ①如图 2, 当点 D 在 $\widehat{BC}$ 上时, 在 AD 上截取 $DE=BD$, 连接 BE , 则 $AE=AD-DE=AD-BD$. 过点 C 作 $CF \perp AB$ 于点 F , 因为 $CA=CB$, 所以 $\angle BCF = \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} \alpha, AB=2BF$. 易证 $\triangle CAB \sim \triangle DEB$, 所以 $\angle ABC = \angle EBD, \frac{AB}{EB} = \frac{BC}{BD}$, 所以 $\angle ABC - \angle EBC = \angle EBD - \angle EBC$, 即 $\angle ABE = \angle CBD, \frac{AB}{CB} = \frac{EB}{DB}$, 所以 $\triangle ABE \sim \triangle CBD$, 所以 $\frac{AE}{CD} = \frac{AB}{CB}$, 所以 $\frac{AD-BD}{CD} = \frac{AB}{CB}$. 在 $Rt\triangle BCF$ 中, 由 $\sin \angle BCF = \frac{BF}{BC} = \sin \frac{\alpha}{2}$, 得 $BF = BC \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$. 所以 $AB = 2BF = 2BC \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$, 所以 $\frac{AD-BD}{CD} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$, 即 $2CD \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = AD - BD$. ②如图 3, 当点 D 在 $\widehat{AB}$ 上时, 延长 BD 至点 G , 使得 $DG=DA$, 连接 AG , 则 $BG=DG+BD=AD+BD$. 因为四边形 $ACBD$ 是圆内接四边形, 所以 $\angle ACB + \angle ADB = 180^\circ$. 又因为 $\angle ADG + \angle ADB = 180^\circ$, 所以 $\angle ACB = \angle ADG$. 易证 $\triangle CAB \sim \triangle DAG$, 所以 $\angle CAB = \angle DAG, \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AG}$, 所以 $\angle CAB + \angle BAD = \angle DAG + \angle BAD$, 即 $\angle CAD = \angle BAG, \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AG}$, 所以 $\triangle CAD \sim \triangle BAG$, 所以 $\frac{CD}{BG} = \frac{AC}{AB}$, 所以 $\frac{CD}{AD+BD} = \frac{AC}{AB}$. 同①可得 $AB = 2AC \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$, 所以 $\frac{CD}{AD+BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$, 所以 $2CD \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = AD + BD$. 综上所述, 当点 D 在 $\widehat{BC}$ 上时, $2CD \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = AD - BD$; 当点 D 在 $\widehat{AB}$ 上时,

$$2CD \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = AD + BD.$$

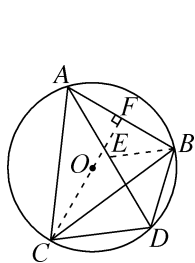


图 2

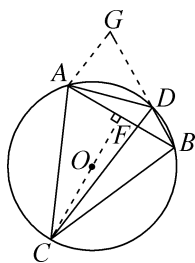


图 3

【解后反思】本题体现了“从特殊到一般”的数学思想，是一种探究问题的重要方法，而“截长补短”的辅助线方法是解题的关键，思维误区是认为 $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sin \alpha$ ，其实不存在此等式，只有通过作角平分线的方法整体求之。

B16 ★ 宿迁市 2024 年初中学业水平考试

- 1. A 2. B 3. B 4. C 5. C 6. A**

7. D 提示:根据题意,得 $x(mx)+x+1=0$,整理,得 $mx^2+x+1=0$. 因为该方程有两个不相等的实数根,

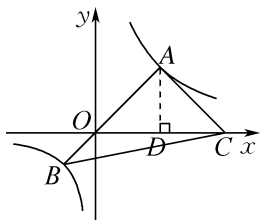
所以 $1^2 - 4m \cdot 1 > 0$ 且 $m \neq 0$, 解得 $m < \frac{1}{4}$ 且 $m \neq 0$.

【解后反思】先根据新定义得到 $x(mx) + x + 1 = 0$, 再把方程化为一般式, 根据题意得到 $1^2 - 4m \cdot 1 > 0$ 且 $m \neq 0$, 解不等式即可. 解题时容易忽视 $m \neq 0$.

8. C 提示:如图,过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于点 D, 设

点 $A\left(a, \frac{k}{a}\right) (a>0)$. 因为 $AO=AC, AD \perp OC$, 所以 $OC=2OD=2a$. 设直线 OA 的表达式为 $y=mx$, 所以 $ma=\frac{k}{a}, m=\frac{k}{a^2}$. 所以直线 OA 的表达式为 $y=\frac{k}{a^2}x$.

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{k}{4x}, \\ y = \frac{k}{a^2}x, \end{cases} \text{ 所以 } x^2 = \frac{a^2}{4}. \text{ 所以 } x = \pm \frac{a}{2}. \text{ 所以点}$$

$$B\left(-\frac{a}{2}, -\frac{k}{2a}\right). \text{ 所以 } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC} = \\ \frac{1}{2}OC \cdot |y_B| + \frac{1}{2}OC \cdot |y_A| = \frac{1}{2} \times 2a \left(\frac{k}{2a} + \frac{k}{a}\right) = \\ \frac{3}{2}k. \text{ 又因为 } S_{\triangle ABC} = 6, \text{ 所以 } \frac{3}{2}k = 6. \text{ 所以 } k = 4.$$


【解后反思】反比例函数图像中的面积问题是中考常见题型,利用“水平底、铅垂高”是计算面积的通法.本题的关键是将 $\triangle ABC$ 的面积用含 k 的方程表示出来,解之即可.

- 9.** $x \geq 1$ **10.** $x(x+4)$

11. 同位角相等,两直线平行 12. 四 13. 12

- 14.** 90 **15.** $\frac{4\pi}{3}$ **16.** 10

17. $\begin{cases} x=5, \\ y=-1 \end{cases}$ 提示:将方程组 $\begin{cases} ax+2y=2a+b, \\ cx-2y=2c+d \end{cases}$ 整理,

得 $\begin{cases} a(x-2)+2y=b, \\ c(x-2)-2y=d. \end{cases}$ 因为关于 x, y 的二元一次方程

组 $\begin{cases} ax+y=b, \\ cx-y=d \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=3, \\ y=-2, \end{cases}$ 所以 $x-2=3$,

$2y = -2$ 或 $-2y = 2$, 解得 $x = 5, y = -1$, 即关于 x, y

的方程组 $\begin{cases} ax+2y=2a+b, \\ cx-2y=2c+d \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=5, \\ y=-1. \end{cases}$

【解后反思】将方程组 $\begin{cases} ax+2y=2a+b, \\ cx-2y=2c+d \end{cases}$ 整理,得

$$\begin{cases} a(x-2)+2y=b, \\ c(x-2)-2y=d, \end{cases}$$

然后利用整体思想结合已知条件可得 $x-2=3, 2y=-2$ 或 $-2y=2$, 解方程即可.

18. $\frac{15}{4}$ 提示:解法1 如图1,过点A作 $AM \perp x$ 轴于点

M , 过点 B 作 $BN \perp x$ 轴于点 N , 设点 $C(x, 0)$. 由题意可得, 点 $A(4, 3)$, $OA = 5$, 设点 $B(4m, 3m)$, 则 $OB = 5m$, 所以 $AB = 5 - 5m$, $NC = x - 4m$. 因为 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以 $\triangle BNC \sim \triangle CMA$, 所以 $\frac{BN}{CM} =$

$\frac{NC}{MA}$, 即 $\frac{3m}{4-x} = \frac{x-4m}{3}$, 整理, 得 $x^2 - (4+4m)x + 25m = 0$. 因为点 C 在 x 轴上, 方程必有实数解, 所以 $(4+4m)^2 - 100m \geq 0$, 即 $16m^2 - 68m + 16 \geq 0$, 所以 $4m^2 - 17m + 4 \geq 0$, 解得 $m \geq 4$ (舍去) 或 $m \leq \frac{1}{4}$, 所以

m 取最大值为 $\frac{1}{4}$, 所以 $AB = 5 - 5m = \frac{15}{4}$.

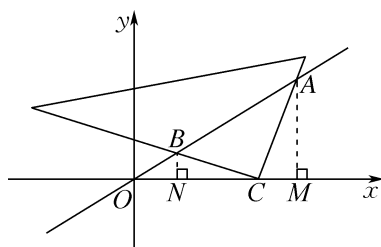


图 1

解法 2 如图 2, 结合图像易得, 当以 AB 为直径的圆与 x 轴相切时, AB 最小. 取 AB 的中点 D 为圆心, 以 AB 为直径画圆. 因为 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以点 C 在 $\odot D$ 上, AB 长最小时, 点 C 应为切点, 过点 D 作 $DE \perp AM$, 连接 CD , 设 AD 的长为 a . 因为 $DE \parallel x$ 轴, 所以 $\frac{AD}{AO} = \frac{AE}{AM}$, 所以 $\frac{a}{5} = \frac{3-a}{3}$, 解得 $a = \frac{15}{8}$, 所以 AB 的最小值为 $2a = \frac{15}{4}$.

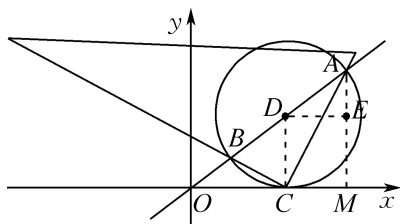


图 2

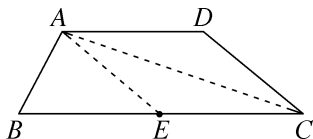
【解后反思】直角顶点在坐标轴上的问题, 通常用到的辅助线是作坐标轴的垂线, 构造 K 型相似三角形求解. 本题中, 利用点 B 在直线 $y = \frac{3}{4}x$ 上, 点 C 在 x 轴上的条件, 设点 $B(4m, 3m)$, $C(x, 0)$, 从而将 AB 的长用含 m 的代数式表示出来, 再根据相似列出关于 x 的一元二次方程, 利用根的判别式确定 m 的取值范围, 从而确定 AB 的最值.

另一方面, 根据 $\angle C = 90^\circ$, 也易想到利用圆的知识来解决最值问题, 关键是要找到当圆与 x 轴相切时, 线段 AB 最短, 再利用相似三角形解决问题.

19. 解: 原式 $= 1 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = 1$.

20. 解: 原式 $= \frac{x+3}{x+1} \cdot \frac{x+1}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{x-3}$. 当 $x = \sqrt{3} + 3$ 时, 原式 $= \frac{1}{\sqrt{3} + 3 - 3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

21. 解: 若选甲, 证明如下: 如图, 连接 AE . 因为 E 是 BC 的中点, 所以 $EC = \frac{1}{2}BC$, 因为 $AD = \frac{1}{2}BC$, 所以 $AD = EC$. 因为 $AD \parallel BC$, 所以四边形 $ADCE$ 是平行四边形. 因为 $AD = DC$, 所以四边形 $ADCE$ 是菱形.



若选乙, 证明如下: 如图, 连接 AC . 由上述证明可知, 四边形 $ADCE$ 是菱形, 所以 $AE = CE = BE$, 所以 $\angle EAC = \angle ECA$, $\angle EAB = \angle B$. 因为 $\angle EAC + \angle ECA + \angle EAB + \angle B = 180^\circ$, 所以 $2\angle EAC + 2\angle EAB = 180^\circ$, 所以 $\angle EAC + \angle EAB = 90^\circ$, 所以 $\angle BAC = 90^\circ$, 即 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

22. 解: (1) 200 36

(2) B 项目的人数为 $200 - 54 - 20 - 50 - 46 = 30$, 补全条形统计图略.

(3) $2\,000 \times \frac{46}{200} = 460$ (名).

答: 估计该校最喜欢“E 乒乓球”的学生人数为 460.

23. 解: (1) $\frac{1}{4}$

(2) 列表如下:

路线	A	B	C	D
A	(A, A)	(A, B)	(A, C)	(A, D)
B	(B, A)	(B, B)	(B, C)	(B, D)
C	(C, A)	(C, B)	(C, C)	(C, D)
D	(D, A)	(D, B)	(D, C)	(D, D)

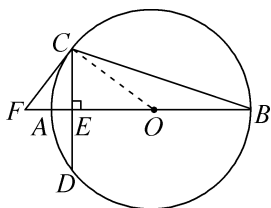
共有 16 种等可能的结果, 其中小刚和小红选择同一路线的结果有 4 种, 所以小刚和小红选择同一路线的概率为 $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

24. 解: 由题意, 得 $DF = CE = 24$ m, $AG = EF = CD = 1.2$ m. 在 $\text{Rt}\triangle BDG$ 中, $\tan \angle BDG = \tan 37^\circ = \frac{BG}{DG} \approx 0.75$, 所以 $DG = \frac{BG}{0.75}$. 在 $\text{Rt}\triangle BFG$ 中, 因为 $\angle BFG = 45^\circ$, 所以 $FG = BG$. 因为 $DF = 24$ m, 所以 $DG - FG = \frac{BG}{0.75} - BG = 24$, 解得 $BG = 72$, 所以 $AB = BG + AG = 73.2$ m.

答: 塔 AB 的高度为 73.2 m.

25. (1) 证明: 如图, 连接 OC . 因为 $OC = OB$, 所以 $\angle B = \angle BCO$, 所以 $\angle AOC = \angle B + \angle BCO = 2\angle B$. 因为 $AB \perp CD$, 所以 $\angle CEO = 90^\circ$, 所以 $\angle COE + \angle OCE = 90^\circ$. 因为

$\angle FCD = 2\angle B$, 所以 $\angle FCD = \angle COE$, 所以 $\angle FCD + \angle OCE = 90^\circ$, 所以 $\angle OCF = 90^\circ$. 因为 OC 是 $\odot O$ 的半径, 点 C 在 $\odot O$ 上, 所以 CF 是 $\odot O$ 的切线.



(2) 解: 因为 AB 是 $\odot O$ 的直径, CD 是 $\odot O$ 的弦, 且 $AB \perp CD$, 所以 $CE = \frac{1}{2}CD = 6$. 因为 $AB = 20$, 所以 $OC = 10$, 所以在 $Rt\triangle CEO$ 中, $OE = \sqrt{OC^2 - CE^2} = 8$. 因为 $\angle OCF = \angle OEC = 90^\circ$, $\angle COE = \angle FOC$, 所以 $\triangle OCE \sim \triangle OFC$, 所以 $\frac{OC}{OF} = \frac{OE}{OC}$, 所以 $\frac{10}{OF} = \frac{8}{10}$, 所以 $OF = \frac{25}{2}$, 所以 $EF = OF - OE = \frac{25}{2} - 8 = \frac{9}{2}$.

26. 解: (1) 设纪念品 B 的单价为 m 元/件, 则纪念品 A 的单价为 $(m+10)$ 元/件. 根据题意, 得 $\frac{600}{m+10} = \frac{400}{m}$, 解得 $m = 20$, 经检验 $m = 20$ 是原方程的解, 所以 $m+10 = 30$.

答: 纪念品 A 的单价为 30 元/件, 纪念品 B 的单价为 20 元/件.

(2) 设总费用为 w 元, 计划购买 A 纪念品 t 件, 则购买 B 纪念品 $(400-t)$ 件. 根据题意, $w = 30t + 20(400-t) = 10t + 8\,000$. 因为纪念品 A 的数量不少于纪念品 B 数量的 2 倍, 所以 $t \geq 2(400-t)$, 解得 $t \geq 266\frac{2}{3}$. 因为 t 为整数, 所以 t 最小值取 267. 在 $w = 10t + 8\,000$ 中, w 随 t 的增大而增大, 所以当 $t = 267$ 时, w 取最小值, 最小值为 $10 \times 267 + 8\,000 = 10\,670$ (元). 因为 $10\,670 < 11\,000$, 符合题意, 此时 $400-t = 400-267 = 133$, 所以购买 A 纪念品 267 件, B 纪念品 133 件, 才能使总费用最少, 最少费用为 10 670 元.

27. 解: (1) 由题意, 得 $y_1 = x(x-2) = x^2 - 2x$,

易知 y_2 过点 $(2, 0)$ 和点 $(4, 0)$, 则 $y_2 = (x-2)(x-4) = x^2 - 6x + 8$.

(2) 设点 $P(a, a^2 - 2a)$, 直线 PA 的表达式为 $y = k(x-2)$. 将点 P 的坐标代入 $y = k(x-2)$, 得 $a^2 - 2a = k(a-2)$, 解得 $k = a$, 则直线 PA 的表达式为 $y = a(x-2)$. 联立上式和抛物线 y_2 的表达式, 得 $x^2 - 6x + 8 = a(x-2)$, 解得 $x_1 = 2, x_Q = 4+a$, 则 $x_Q - x_P = 4+a-a = 4$.

(3) $|m-n|$ 是定值, 定值为 6. 提示: 由 (1) 知, $y_1 = x(x-2) = x^2 - 2x$. 因为抛物线 y_1 与 y_3 交于点 C , 所以两式联立, 得 $x^2 - 2x = x^2 - 8x + t$, 解得 $x = \frac{1}{6}t$, 则点 $C(\frac{1}{6}t, \frac{1}{36}t^2 - \frac{1}{3}t)$. 因为点 M 坐标为 $(m, m^2 - 2m)$, 求得直线 CM 的表达式为 $y = (m + \frac{1}{6}t - 2)x - \frac{1}{6}mt$, 将点 $N(n, n^2 - 8n + t)$ 代入, 整理, 得 $t(n-m-6) = 6n(n-m-6)$. 因为点 M, N 不与点 C 重合, 所以 $t \neq 6n$, 所以 $n-m-6 = 0$, 即 $n-m = 6$, 即 $|m-n| = 6$ 为定值.

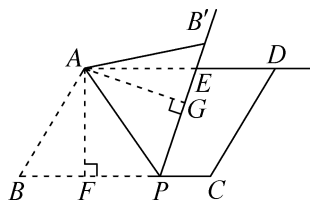
【解后反思】 本题主要考查了二次函数的表达式的求法和与几何图形结合的综合能力的培养. 要会利用数形结合的思想把代数和几何图形结合起来, 利用点的坐标的意义表示线段的长度, 从而求出线段之间的关系.

28. 【操作判断】 45

【探究证明】 (1) 解: $\triangle BFG$ 为等腰直角三角形, 证明如下:

如题图 3, 由题意可得 $\angle EBF = \frac{1}{2}\angle ABC = 45^\circ$. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形, 所以 $\angle BCA = \angle ACD = 45^\circ$. 因为 $\angle GBH = \angle FCH = 45^\circ$, $\angle BHG = \angle CHF$, 所以 $\triangle BHG \sim \triangle CHF$, 所以 $\frac{BH}{CH} = \frac{HG}{HF}$, 所以 $\frac{BH}{GH} = \frac{CH}{FH}$. 因为 $\angle GHF = \angle CHB$, 所以 $\triangle BHC \sim \triangle GHF$, 所以 $\angle GFH = \angle BCH = 45^\circ$, 所以 $\angle BGF = 180^\circ - \angle EBF - \angle GFH = 90^\circ$, 所以 $\triangle FBG$ 为等腰直角三角形.

(2) 证明: 因为 $\triangle BFG$ 为等腰直角三角形, 所以 $\angle BGF = 90^\circ, BG = GF$. 又因为 $PQ \perp$

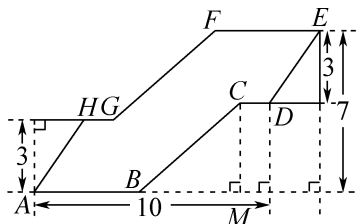


【解后反思】本题考查折叠的性质、平行四边形的性质、几何动态问题,解题的关键是抓住在点 P 运动的过程中不变的量,即“变中不变”.根据折叠的性质,易判断出 $\triangle ABP \cong \triangle AB'P$,难点在于想到过点 A 作两个三角形的高,得两条高也对应相等,而 AF 的长为定值,所以 AG 的长也为定值,从而判断出 $B'P \perp AD$ 时, AE 取最小值 $\sqrt{3}$,选项 C 错误.

9. 2 10. $(a+4)(a-4)$ 11. 3.8×10^5

12. 12 13. $\frac{5\pi}{3}$ 14. $\frac{5}{2}$

15. 5.8 提示:过点 C 作 $CM \perp AB$ 于点 M .由题图 1 知, $CD + AB = GF = BC$. 设 $CD = x$, $BC = y$, 则 $AB = y - x$, 所以 $BM = 10 - CD - AB = 10 - x - (y - x) = 10 - y$, 由图可知, $CM = 7 - 3 = 4$. 在 $\triangle BCM$ 中, 由勾股定理, 得 $y^2 = 4^2 + (10 - y)^2$, 解得 $y = 5.8$.

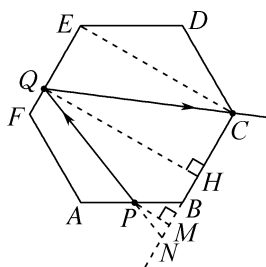


【解后反思】本题的关键是看懂题图 1 中的拼图, 知道 AB, CD 线段的和等于 BC , 再利用勾股定理进行求解.

16. $\frac{10}{7}$ 提示:如图,连接 EC , 延长 CB 交 QP 的延长线交于点 N , 过点 Q 作 $QH \perp BC$ 于点 H , 过点 P 作 $PM \perp BN$ 于点 M . 由正六边形可得 $EQ = CH$, $QH = CE = \sqrt{3} DE = \sqrt{3} AB = 2\sqrt{3}$, $\angle ABC = 120^\circ$. 所以 $\angle ABN = 60^\circ$, 又因为 $PB = \frac{1}{2} AB = 1$, $\angle BMP = 90^\circ$, 所以 $BM = \frac{1}{2}$, $PM = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 由光的反射, 得 $\angle PQH = \angle CQH$, 所以 $\angle QCH = \angle QNH$, 又因为 $\angle QHC = \angle PMN = 90^\circ$, 所以 $\triangle QHC \sim \triangle PMN$, 所以 $\frac{PM}{QH} = \frac{MN}{HC}$, 设 $BN = a$, 则 $CN = 2 + a$, $NM = a - \frac{1}{2}$, 易得

$$CH = \frac{1}{2} CN = \frac{2+a}{2}, \text{ 所以 } \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a - \frac{1}{2}}{\frac{2+a}{2}}, \text{ 解得 } a = \frac{6}{7},$$

$$\text{所以 } EQ = CH = \frac{2+a}{2} = \frac{10}{7}.$$



17. 解: (1) 原式 $= \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 1$.

(2) 不等式两边同时乘 6, 得 $3x \geq 2x - 6 + 12$, 解得 $x \geq 6$.

18. 解: 原式 $= \frac{x-2+3}{x-2} \cdot \frac{(x-2)^2}{x+1} = x - 2$. 当 $x = -3$ 时, 原式 $= -3 - 2 = -5$.

19. 证明: 因为四边形 $ABCD$ 为矩形, 所以 $AB = CD$, $AB \parallel CD$, 所以 $\angle ABE = \angle CDF$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中,
$$\begin{cases} AB = CD, \\ \angle ABE = \angle CDF, \\ BE = DF, \end{cases} \triangle ABE \cong \triangle CDF (\text{SAS}).$$

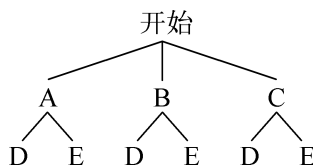
20. 解: 设客人有 x 名, 盘子有 y 个. 则
$$\begin{cases} y + 2 = \frac{x}{2}, \\ y - 3 = \frac{x}{3}, \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x = 30, \\ y = 13. \end{cases}$$

答: 客人有 30 名, 盘子有 13 个.

21. 解: (1) $\frac{1}{3}$

(2) 画树状图如下:



由图可知, 共有 6 种等可能的情况, 其中符合条件的只有 1 种, 故小明恰好选中周恩来纪念馆和铁山寺国家森林公园的概率为 $\frac{1}{6}$.

22. 解: (1) 路线一的平均数为 $\frac{1}{10} \times (15 + 16 + 17 + 3 \times 18 + 2 \times 19 + 2 \times 20) = 18$; 众数为

(2) 从平均数和中位数的角度考虑,路线二的平均数和中位数均比路线一的时间少,故选择路线二;从方差和极差的角度考虑,路线一的方差和极差均比路线二的小,路线一花的时间稳定,故选择路线一.(答案不唯一)

答:每节拉杆的长度为 30 cm.

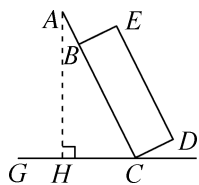


图 1

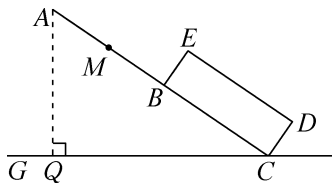
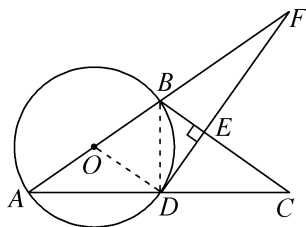


图 2

(2) 设 $ED=m$, 因为 $DO=2ED$, 所以 $DO=2m$, 故点 E 的坐标为 $(-m, 2m)$, 将点 $E(-m, 2m)$ 代入 $y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$, 得 $m=\frac{3}{7}$, 所

标为 $(\frac{7}{2}, \frac{6}{7})$.

$$\sin C = \sin A = \frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$


b^2 , 分以下两种情况讨论: (i) 当 $8-b^2 \geq 2b$, 即 $(b+1)^2 \leq 9$ 时, 解得 $-4 \leq b \leq 2$, 由题意得 $h = 8 - b^2 - 2b = -(b+1)^2 + 9$. 所以当 $-4 \leq b \leq -1$ 时, h 随 b 的增大而增大; 当 $-1 < b \leq 2$ 时, h 随 b 的增大而减小. (ii) 当 $8 - b^2 <$

2b, 即 $(b+1)^2 > 9$ 时, 解得 $b > 2$ 或 $b < -4$, 由题意得 $h = 2b - (8 - b^2) = (b+1)^2 - 9$. 当 $b < -4$ 时, h 随 b 的增大而减小; 当 $b > 2$ 时, h 随 b 的增大而增大.

(3) 当 $a < 0$ 时, 因为 $y = ax^2 + bx + 8$ 过点 $B(8, 0)$ 和 $A(0, 8)$, 所以二次函数与 x 轴的另一个交点 C 在 y 轴的左侧. 由于 $\frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32 > 20$, 故 $\triangle ABC$ 面积必不小于 20, 所以 $a < 0$ 符合条件. 当 $a > 0$ 时, 因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 8 \times BC \geq 20$, 所以 $BC \geq 5$, 所以点 C 在点 $(13, 0)$ 右侧, 或在原点与点 $(3, 0)$ 之间.

①当点 C 在点 $(13, 0)$ 右侧时, 将点 $B(8, 0)$ 和 $(13, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 8$, 得 $a = \frac{1}{13}$,

结合图像可得, 当 $0 < a \leq \frac{1}{13}$ 时, 点 C 在点 $(13, 0)$ 右侧.

②当点 C 在原点与点 $(3, 0)$ 之间时, 将点 $B(8, 0)$ 和 $(3, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 8$, 得 $a = \frac{1}{3}$, 结合图像可得, 当

$a \geq \frac{1}{3}$ 时, 点 C 在原点与点 $(3, 0)$ 之间. 综上所述,

所述, a 的取值范围为 $a < 0$ 或 $0 < a \leq \frac{1}{13}$ 或

$a \geq \frac{1}{3}$.

【解后反思】 本题考查二次函数图像的性质, 掌握二次函数顶点坐标公式与待定系数法求二次函数表达式是解题的关键. 在第(3)小问中, 用数形结合的方法画出二次函数图像的草图, 根据 $a > 0$ 时, a 的值越大, 二次函数开口越小的特性, 即可求出 a 的取值范围. 第(3)小问也可以使用韦达定理, 根据 $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$ 来求解. 无论使用哪种方法, 都要注意对 a 的正负进行分类讨论.

27. (1) $DM = DN \quad CA = CE \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

(2) 如图1, 过点 B 作 $BM \perp AD$, 交 AD 的延长线于点 M , 过点 C 作 $CN \perp AD$ 于点 N , 则 $\triangle BMD \sim \triangle CND$, 所以 $\frac{BD}{CD} = \frac{BM}{CN}$. 因为

$$\angle BAD = 45^\circ, \text{ 所以 } BM = AB \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} AB.$$

$$\text{因为 } \angle CAD = 60^\circ, \text{ 所以 } CN = AC \cdot \sin 60^\circ =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} AC. \text{ 因为 } AB = AC, \text{ 所以 } \frac{BM}{CN} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} AB}{\frac{\sqrt{3}}{2} AC} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{所以 } \frac{BD}{CD} = \frac{BM}{CN} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

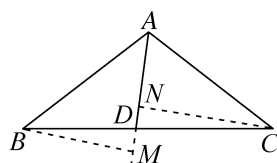


图 1

(3) 如图2, 点 P 即为所求.

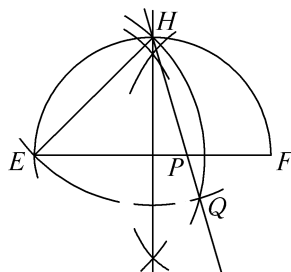


图 2

提示: 由(2)的解题过程可得, 当 $\angle BAD = 60^\circ$,

$$\angle CAD = 30^\circ, AB = AC \text{ 时, } \frac{BD}{CD} = \frac{BM}{CN} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} AB}{\frac{1}{2} AC} =$$

$\sqrt{3}$. 此时, $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, 因此, 只要以 EF 为斜边作等腰直角三角形 EFH , 再 EH 为边作一个等边三角形 EHQ , 得 60° 角, HQ 与 EF 交点即为点 P .

$$(4) \quad BD \cdot DE = \frac{5 \sin \alpha}{\tan \beta} + 3 - 5 \cos \alpha. \quad \text{提示: 如}$$

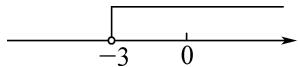
图3, 以 BD 为边作 $\angle MBD = \angle ACE$, BM 交直线 AC 于点 G . 又因为 $\angle BDG = \angle CDE$, 所以 $\triangle GBD \sim \triangle ECD$, 所以 $\angle BGD = \angle E = \beta$, $\frac{BD}{CD} = \frac{DG}{DE}$, 所以 $BD \cdot DE = CD \cdot DG = 1 \cdot DG = DG$. 因为 $\alpha > \beta$, 所以 $\angle BAC > \angle BGD$, 所以点 G 在 DA 的延长线上. 过点

$$B \text{ 作 } BF \perp AC \text{ 于点 } F, \text{ 则 } \sin \alpha = \frac{BF}{AB}, BF = 5 \sin \alpha;$$

$$\cos \alpha = \frac{AF}{AB}, AF = 5 \cos \alpha; \tan \beta = \frac{BF}{FG}, FG = \frac{BF}{\tan \beta} =$$

$$\frac{5 \sin \alpha}{\tan \beta}. \text{ 所以 } DG = AD + AG = AD + FG - AF = 3 +$$

18. 解:去分母,得 $x-1 < 2(x+1)$,去括号,得 $x-1 < 2x+2$,移项,得 $-1-2 < 2x-x$,解得 $x > -3$.所以原不等式的解集为 $x > -3$.这个不等式的解集在数轴上表示如下:



19. 解:从第②步开始出现错误.正确的解题过程为:

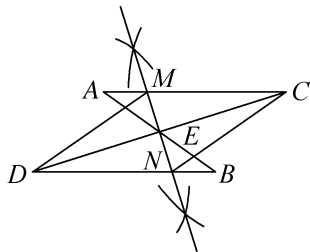
$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{m+1}{(m+1)(m-1)} - \frac{2}{(m+1)(m-1)} = \\ &= \frac{m+1-2}{(m+1)(m-1)} = \frac{m-1}{(m+1)(m-1)} = \frac{1}{m+1}. \end{aligned}$$

20. (1) 证明:因为 $AC \parallel BD$,所以 $\angle A = \angle B$, $\angle C =$

$$\angle D. \text{在} \triangle AEC \text{和} \triangle BED \text{中}, \begin{cases} \angle A = \angle B, \\ \angle C = \angle D, \\ EC = ED, \end{cases} \text{所以}$$

$$\triangle AEC \cong \triangle BED (\text{AAS}).$$

- (2) 解:如图所示.菱形 $DMCN$ 即为所求.



21. 解:(1) 4 0.25 83

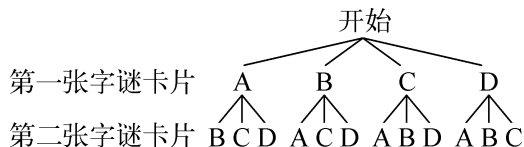
$$(2) 300 \times 0.25 = 75 (\text{人}).$$

答:估计七年级 300 名男生中约有 75 人体能测试能达到优秀.

- (3) 平时应合理加强体能训练.(答案不唯一)

22. 解:(1) $\frac{1}{2}$

- (2) 画树状图如下:



由图可知,共有 12 种等可能结果,其中小军抽取的字谜均是猜“数学家人名”的结果有 2 种,所以 $P(\text{小军抽取的字谜均是“猜数学家人名”}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

23. 解:若每次购买都是 100 把,则 $200 \times 8 \times$

$0.9 = 1\,440 \neq 1\,504$.所以一次购买少于 100 把,另一次购买多于 100 把.所以设一次邮购折扇 $x (x < 100)$ 把,则另一次邮购折扇 $(200 - x)$ 把.由题意,得 $8x(1 + 10\%) + 0.9 \times 8(200 - x) = 1\,504$,解得 $x = 40$.所以 $200 - x = 200 - 40 = 160$.

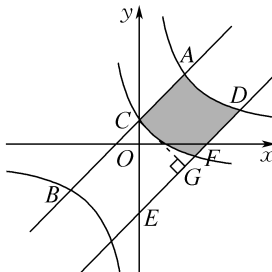
答:两次邮购的折扇分别是 40 把和 160 把.

24. 解:(1) 因为点 A 在 $y = \frac{6}{x}$ 的图像上,所以当

$x = 2$ 时, $y = 3$.所以将点 $A(2, 3)$ 代入 $y = kx + 1$,得 $k = 1$.

- (2) $x < -3$ 或 $0 < x < 2$.

(3) 由题意可知点 $C(0, 1)$, $CE = 4$.如图,过点 C 作 $CG \perp DE$,垂足为 G,可求得 $CG = 2\sqrt{2}$.又因为点 $A(2, 3)$, $C(0, 1)$,所以 $AC = 2\sqrt{2}$.由平移性质可知,阴影部分面积就是 $\square ACFD$ 的面积,即 $2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 8$.



25. 解:(1) 90 76

- (2) 如图,过点 A_1 作 $A_1D \perp BC$ 于点 D.在

$\text{Rt} \triangle CA_2A_1$ 中, $A_2A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ km}$, $\angle CA_2A_1 =$

76° ,所以 $CA_1 = A_1A_2 \cdot \tan 76^\circ \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \times$

$4.00 = 2\sqrt{2} (\text{km})$.在 $\text{Rt} \triangle CA_1D$ 中,易知

$\angle CA_1D = 45^\circ$,所以 $A_1D = CA_1 \cdot \cos 45^\circ =$

$$2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2.0 (\text{km}).$$

答:点 A_1 到道路 BC 的距离为 2.0 km.

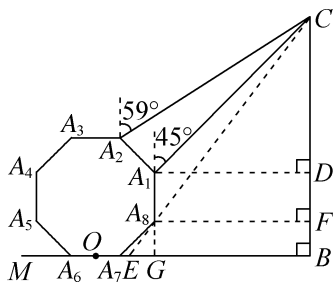
(3) 如图,连接 CA_8 并延长交 BM 于点 E,延长 A_1A_8 交 BE 于点 G,过点 A_8 作 $A_8F \perp BC$ 于点 F.因为正八边形的外角均为 45° ,所以在 $\text{Rt} \triangle A_7A_8G$ 中, $A_8G = \frac{1}{2} \text{ km}$.所以

$FB = A_8G = \frac{1}{2}$ km. 又因为 $A_8F = A_1D = CD = 2$ km, $DF = A_1A_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ km, 所以 $CF = CD + DF = \frac{4+\sqrt{2}}{2}$ km, $CB = CD + DF + FB = \frac{5+\sqrt{2}}{2}$ km. 由题意可知, $\text{Rt}\triangle CA_8F \sim$

$\text{Rt}\triangle CEB$, 所以 $\frac{CF}{CB} = \frac{A_8F}{EB}$, 即 $\frac{\frac{4+\sqrt{2}}{2}}{\frac{5+\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{EB}$,

因为 $\sqrt{2} \approx 1.41$, 所以 $EB \approx 2.4$ km.

答: 小李离点 B 处不超过 2.4 km, 才能确保观察雕塑不会受到游乐城的影响.



26. (1) 解: 分别将点 $A(-1, 0)$, $B(4, 0)$ 代入

$y = ax^2 + bx - 1$, 得 $\begin{cases} a - b - 1 = 0, \\ 16a + 4b - 1 = 0. \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} a = \frac{1}{4}, \\ b = -\frac{3}{4}. \end{cases}$ 所以函数表达式为 $y = \frac{1}{4}x^2 -$

$\frac{3}{4}x - 1$.

(2) 证明: 因为 $b = 1$, 所以 $y = ax^2 + x - 1$. 当 $x = -1$ 时, $y = a - 2$, 即点 $M(-1, a - 2)$; 当 $x = 1$ 时, $y = a$, 即点 $N(1, a)$. 因为点 $C(-1, a)$, $N(1, a)$, 所以 $CN = 2$, $CM = a - (a - 2) = 2$. 因为 $CM \perp CN$, 所以在 $\text{Rt}\triangle CMN$ 中, $MN = \sqrt{CM^2 + CN^2} = 2\sqrt{2}$.

因为 $DN = a + 2\sqrt{2} - a = 2\sqrt{2}$, 所以 $DN = MN$, 所以 $\angle NDM = \angle NMD$. 因为 $DN \parallel CM$, 所以 $\angle NDM = \angle CMD$. 所以 $\angle NMD = \angle CMD$. 所以 MD 平分 $\angle CMN$.

(3) 解: 设点 $G(m, m - 1)$, 则点 $H(m, m^2 + bm - 1)$, $1 \leq m \leq 3$. 当 $a = 1$ 时, $y = x^2 + bx - 1$. 令 $x^2 + bx - 1 = x - 1$, 解得 $x_1 = 0$, $x_2 = 1 - b$. 因为 $b \leq -2$, 所以 $x_2 = 1 - b \geq 3$, 所以点 G 在点 H 的上方(如图 1). 设 $GH = t$, 故 $t = -m^2 + (1 - b)m$, 其对称轴为 $m = \frac{1 - b}{2}$,

且 $\frac{1 - b}{2} \geq \frac{3}{2}$. 分情况讨论:

① 当 $\frac{3}{2} \leq \frac{1 - b}{2} \leq 3$ 时, 即 $-5 \leq b \leq -2$. 由图 2 可知, 当 $m = \frac{1 - b}{2}$ 时, t 取得最大值 $\frac{(1 - b)^2}{4} = 4$, 解得 $b = -3$ 或 $b = 5$ (舍去).

② 当 $\frac{1 - b}{2} > 3$ 时, 得 $b < -5$, 由图 3 可知, 当 $m = 3$ 时, t 取得最大值 $-9 + 3 - 3b = 4$, 解得 $b = -\frac{10}{3}$ (舍去).

综上所述, b 的值为 -3 .

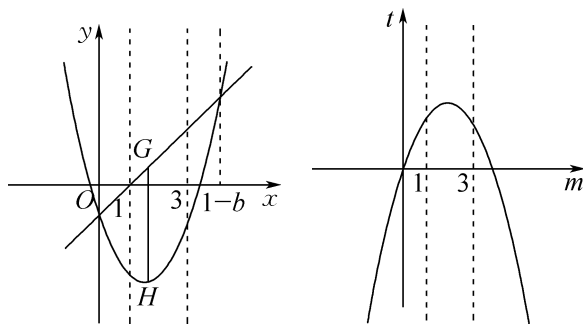


图 1

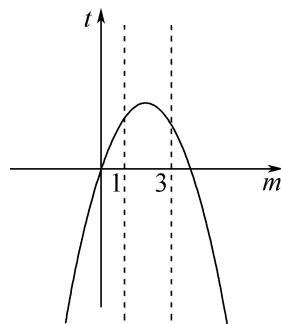


图 2

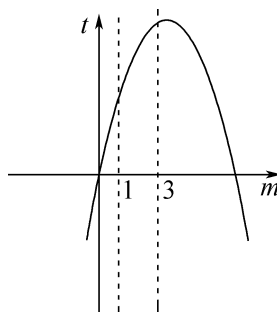


图 3

27. 解: (1) 2

(2) $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$. 提示: 如图 1, 因为 $EG \perp FH$, 所以 $a^2 = OF^2 + OE^2$, $c^2 = OG^2 + OH^2$, $d^2 = OE^2 + OH^2$, $b^2 = OF^2 + OG^2$, 所以 $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. 结合题中图形变换, 可得 $PA^2 + PC^2 =$

$$PB^2 + PD^2.$$

(3) 如图 2, 因为将 $\triangle PDC$ 绕点 P 逆时针旋转, 所以点 D 在以点 P 为圆心, PD 为半径的圆上运动. 因为 A 为圆外一个定点, 所以当 AD 与 $\odot P$ 相切时, $\angle DAP$ 最大. 所以 $PD \perp AD$, 所以 $AD^2 = AP^2 - PD^2$. 由 (2) 可得 $AE = DF$, 因为 $PE = 8$, $PF = 5$, 所以 $AD^2 = AP^2 - PD^2 = PE^2 + AE^2 - PF^2 - DF^2 = 8^2 - 5^2 = 39$, 所以 $AD = \sqrt{39}$.

(4) 如图 3, 将 $\triangle BDC$ 沿 BC 对折, 点 D 的对应点为 D_1 , 将 $\triangle AEC$ 沿 AC 对折, 点 E 的对应点为 E_1 , 连接 D_1E_1 , 所以 $CD = CD_1$, $CE = CE_1$. 再将 $\triangle ABE_1$ 沿 AC 方向向右平移, 使点 A 与点 D_1 重合, 如图 4, 得 $\triangle B_1D_1E_2$. 由 (2) 可得, $AE + BD = AE_1 + BD_1 = D_1E_2 + BD_1$, 所以当 E_2, D_1, B 三点共线时, $AE + BD = D_1E_2 + BD_1$ 最短. 因为 $AC + CD = 5$, $BC + CE = 8$, 所以 $E_1E_2 = 5$, $BE_1 = 8$, 由勾股定理, 得 $BE_2 = \sqrt{BE_1^2 + E_1E_2^2} = \sqrt{89}$. 所以 $AE + BD$ 的最小值为 $\sqrt{89}$.

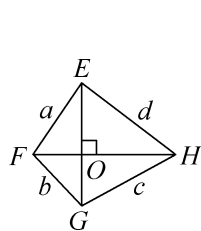


图 1

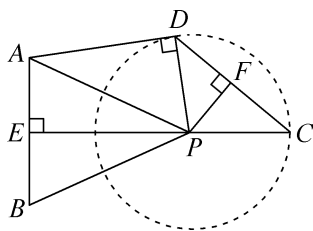


图 2

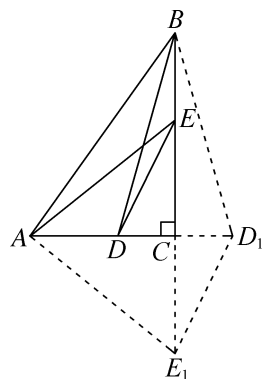


图 3

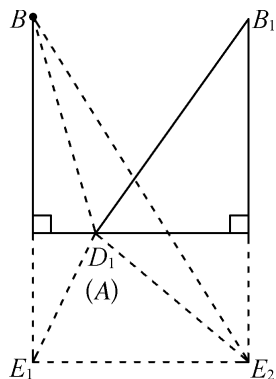


图 4

【方法总结】 平移、旋转、轴对称变换是初中几何中的三大变换, 可将分散的条件集中于同一三角形中, 从而通过计算解决问题. 本题提供了解决问题的思维方向, 只要按照

此法, 模仿、理解直至领悟, 问题就迎刃而解. 在本题最后一问中给出的条件 $AC + CD = 5$, $BC + CE = 8$, 它们在同一直线上, 通过轴对称变换, 将其“截长补短”的构成一条线段, 然后平移, 此为通法.

B19 徐州市 2024 年初中学业水平考试

1. D 2. D 3. A 4. A 5. B 6. D

7. C 提示: 观察图形可知, 圆的直径等于正方形 $ABCD$ 的边长, 也等于阴影正方形的对角线长, 所以阴影正方形的边长与正方形 $ABCD$ 的边长之比为 $1 : \sqrt{2}$, 则面积之比为 $1 : 2$, 所以 P (飞镖落在阴影区域) $= \frac{1}{2}$.

8. C 提示: 观察速度与时间的函数关系图可知, 在开始时随时间推移速度越来越快, 速度达到最大, 接着速度迅速下降到 0, 并保持了一段时间的速度为 0, 接着又增长到一定的速度, 并以这个速度运动, 按照上述分析, 只有选项 C 符合题意.

【解后反思】 本题是结合物理和生活实际的跨学科题, 正理解图中函数图像的意义是解题的关键, 四个选项中, 要结合生活实际去思考每段描述中的运动状态.

9. 5.146×10^9 10. 30 11. -2 12. 35

13. $\frac{7}{8}$ 14. $x = 2$ 15. $b < c < a$ 16. ± 2

17. 1 提示: 将二次函数 $y = (x - 2\ 023)(x - 2\ 024) + 5$ 的图像向下平移 5 个单位长度, 得到的二次函数表达式为 $y = (x - 2\ 023)(x - 2\ 024)$.

18. 1 提示: 设圆锥的母线长为 l cm, 圆锥底面圆的半径为 r cm. 由题意, 得 $\frac{90 \times \pi \times l^2}{360} = 4\pi$, 解得 $l = 4$, 所以 $\frac{90 \times \pi \times 4}{180} = 2\pi r$, 解得 $r = 1$.

19. 解: (1) 原式 $= 3 - 1 + 2 - 2 = 2$.

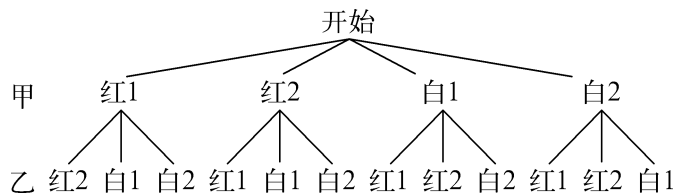
$$(2) \text{ 原式} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \cdot \frac{x}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x^2} \cdot \frac{x}{x - 1} = \frac{x + 1}{x}.$$

20. 解: (1) 移项, 得 $x^2 + 2x = 1$, 两边同时加上 1, 得 $x^2 + 2x + 1 = 2$, 即 $(x + 1)^2 = 2$, 所以 $x + 1 = \pm \sqrt{2}$, 解得 $x_1 = -1 + \sqrt{2}$, $x_2 = -1 - \sqrt{2}$.

(2) 解 $3x-1 < 8$, 得 $x < 3$. 解 $\frac{x+1}{3} < \frac{x}{2}$, 得 $x > 2$. 所以原不等式组的解集为 $2 < x < 3$.

21. 解: (1) $\frac{1}{2}$

(2) 画树状图如下:



由图可知, 共有 12 种等可能的情况, 其中两人摸到相同颜色球的情况有 4 种, 所以两人

摸到相同颜色球的概率为 $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

22. 解: 设甲原来有 x 枚钱币, 乙原来有 y 枚钱币. 根据题意, 得 $\begin{cases} x+10=6(y-10), \\ x-10=y+10, \end{cases}$ 解

得 $\begin{cases} x=38, \\ y=18. \end{cases}$

答: 甲原来有 38 枚钱币, 乙原来有 18 枚钱币.

23. (1) 证明: 因为四边形 $ABCD$ 是正方形, BD 是对角线, 所以 $AB = BC$, $\angle ABD = \angle CBD = 45^\circ$. 又因为 $BE = BE$, 所以 $\triangle EAB \cong \triangle ECB$ (SAS).

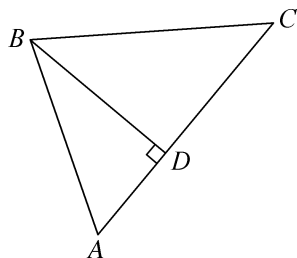
(2) 证明: 因为四边形 $ABCD$ 是正方形, BD 是对角线, 所以 $\angle ADB = 45^\circ$, $AD = DC$, 所以 $\angle ADB = \angle AED + \angle DAE = 45^\circ$. 因为 $\triangle EAB \cong \triangle ECB$, 所以 $\angle AEB = \angle CEB$. 因为 $\angle AEC = \angle AEB + \angle CEB = 45^\circ$, 所以 $2\angle AEB = 45^\circ$, 解得 $\angle AEB = 22.5^\circ$, 所以 $22.5^\circ + \angle DAE = 45^\circ$, 所以 $\angle DAE = 22.5^\circ$. 所以 $\angle DAE = \angle AEB$, 所以 $AD = DE$, 所以 $DC = DE$.

24. 解: (1) ①③

(2) B 提示: 2015 年生的孩子大约到 2032 年初中毕业.

(3) 2024 年上半年, 该市小学在校学生共有 $15.3 + 14.5 + 13.4 + 13.3 + 12.3 + 12.8 = 81.6$ (万人).

25. 解: 如图, 过点 B 作 $BD \perp AC$, 垂足为 D . 因为 $\angle BAC = 60^\circ$, 所以 $AB = 2AD$, $BD = \sqrt{3}AD$. 因为 $\angle BCA = 45^\circ$, 所以 $BD = DC = \sqrt{3}AD$. 因为 $AC = AD + DC = 1640$ m, 所以 $AD = (820\sqrt{3} - 820)$ m, 所以 $AB = 2AD = 2 \times (820\sqrt{3} - 820) \approx 1197$ (m).



26. 解: (1) 因为 A, B 为一次函数 $y = -x + 5$ 的图像与二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图像的公共点, 点 A, B 的横坐标分别为 0, 4, 所以当 $x = 0$ 时, $y = 0 + 5 = 5$; 当 $x = 4$ 时, $y = -4 + 5 = 1$, 所以点 A 的坐标为 $(0, 5)$, 点 B 的坐标为 $(4, 1)$. 将 A, B 两点坐标代入二次函数表

达式 $y = x^2 + bx + c$, 得 $\begin{cases} c=5, \\ 4^2 + 4b + c = 1, \end{cases}$ 解

得 $\begin{cases} b=-5, \\ c=5. \end{cases}$

(2) 解法 1 由(1)知, 二次函数的表达式为 $y = x^2 - 5x + 5$. 因为点 A 的坐标为 $(0, 5)$, 点 B 的坐标为 $(4, 1)$. 所以 $AB = \sqrt{(0-4)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$. 当与 AB 平行的直线与二次函数只有一个公共点时, $\triangle PAB$ 的面积最大. 设此时与 AB 平行的直线的表达式为 $y = -x + k$, 则 $-x + k = x^2 - 5x + 5$ 有两个相等的实数根, 即 $x^2 - 4x + 5 - k = 0$ 有两个相等的实数根, 所以 $(-4)^2 - 4(5 - k) = 0$, 解得 $k = 1$, 所以这条直线的表达式为 $y = -x + 1$, 所以 $y = -x + 1$ 与 $y = x^2 - 5x + 5$ 的交点为 $P(2, -1)$. 设直线 AP 的表达式为 $y = px + q$. 将点 $A(0, 5), P(2, -1)$ 代入, 得 $p = -3, q = 5$, 所以直线 AP 的表达式为 $y = -3x + 5$, 令 $y = 1$, 则 $x = \frac{4}{3}$, 所

以 $\triangle PAB$ 的面积最大值为 $\frac{1}{2} \times (5+1) \times \left(4 - \frac{4}{3}\right) = 8$.

解法 2 由(1)得抛物线的函数表达式为 $y = x^2 - 5x + 5$. 设点 $P(t, t^2 - 5t + 5)$, 过点 P 作 $PH \parallel y$ 轴, 交直线 AB 于点 H , 则点 $H(t, 5-t)$, 所以 $PH = (5-t) - (t^2 - 5t + 5) = -t^2 + 4t$, 所以 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle APH} + S_{\triangle BPH} = \frac{1}{2}(-t^2 + 4t) \times 4 = -2t^2 + 8t = -2(t-2)^2 + 8$. 当 $t=2$ 时, $S_{\triangle ABP}$ 取最大值, 最大值为8.

27. 解: (1) 因为 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以 $\angle A + \angle B = 90^\circ$. 因为 $CD \perp AB$, 所以 $\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$, 所以 $\angle B + \angle BCD = 90^\circ$, 所以 $\angle BCD = \angle A$. 因为 $\angle BCD = \angle A$, $\angle ADC = \angle CDB$, 所以 $\triangle ADC \sim \triangle CDB$, 所以 $\frac{AD}{DC} = \frac{CD}{BD}$, 即 $CD^2 = AD \cdot BD$, 所以点 D 是点 C 的“关联点”.

(2) 如图1, 以 AB 为直径作圆 O , 在圆 O 上找一点 C , 使 $CD \perp AB$, 以点 D 为圆心、 CD 长为半径作圆 D , 在圆 D 上且在圆 O 内部的任意一点都满足条件①②.

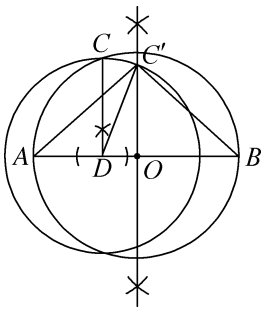


图1

(3) $\sqrt{m(n-m)} < AC < \sqrt{m(m+n)}$ 或 $\sqrt{m(m+n)} < AC < \sqrt{m(m+3n)}$ 提示: ①当 $n > m$ 时, 如图2, 在 $\widehat{C_1C_2}$ 之间(不含点 C_1, C_2)满足条件.

因为 $C_1D = C_2D = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{mn}$, 所以在 $\text{Rt}\triangle ADC_1$ 中, $AC_1 = \sqrt{AD^2 + C_1D^2} = \sqrt{m^2 + mn} = \sqrt{m(m+n)}$, 在 $\text{Rt}\triangle ADC_2$ 中, $AC_2 =$

$\sqrt{C_2D^2 - AD^2} = \sqrt{mn - m^2} = \sqrt{m(n-m)}$, 所以 $\sqrt{m(n-m)} < AC < \sqrt{m(m+n)}$.

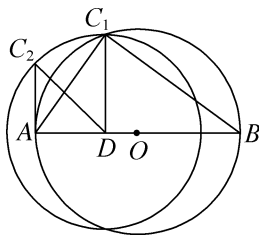


图2

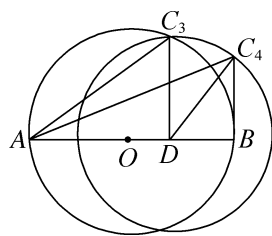


图3

②当 $m > n$ 时, 如图3, 点 C 在 $\widehat{C_3C_4}$ 之间(不含点 C_3, C_4)满足条件.

因为 $C_3D = C_4D = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{mn}$, 所以在 $\text{Rt}\triangle ADC_3$ 中, $AC_3 = \sqrt{AD^2 + C_3D^2} = \sqrt{m^2 + mn} = \sqrt{m(m+n)}$. 在 $\text{Rt}\triangle DBC_4$ 中, $BC_4 = \sqrt{C_4D^2 - BD^2} = \sqrt{mn - n^2}$, 所以在 $\text{Rt}\triangle ABC_4$ 中, $AC_4 = \sqrt{AB^2 + BC_4^2} = \sqrt{(m+n)^2 + mn - n^2} = \sqrt{m(m+3n)}$, 所以 $\sqrt{m(m+n)} < AC < \sqrt{m(m+3n)}$.

③当 $m = n$ 时, 显然不能满足条件.

综上所述, $\sqrt{m(n-m)} < AC < \sqrt{m(m+n)}$ 或 $\sqrt{m(m+n)} < AC < \sqrt{m(m+3n)}$.

28. 解: (1) 5 提示: 当点 P 与点 B 重合时, 点 F 在点 D 处. 此时 E, N, D, F 共线, 如图1, 在 $\square ABCD$ 中, $BC = AD = 10$, 因为将 PC 绕点 P 逆时针旋转 60° 得到 PE , 所以 $PC = BC = PE = 10$. 因为 M, N 分别是 PF, ED 的中点, 所以 $2MN = PE = 10$, 所以 $MN = 5$.

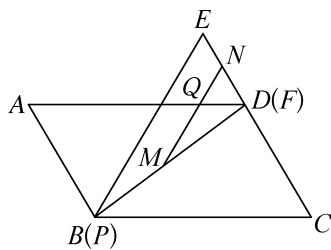


图1

(2) 不变. 如图2, 连接 EC , 延长 CB 至点 G , 使 $BG = BP$, 连接 GP 并延长, 交 CD 延长线于点 H , 设 GH 交 AD 于点 I , CH 交 EP 于点 K , 连接 HE, HF . 因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle BAD = 60^\circ$, 所以 $\angle BCD = 60^\circ$, $\angle ABC = \angle ADC = 120^\circ$, 易得 $\triangle GBP$, $\triangle GCH$ 和 $\triangle PCE$ 均为等边三角形, 所以 $GB = BP = GP$, $CP = PE = CE$, $CG = CH$, $\angle PCE = \angle GCH = 60^\circ$. 所以 $\angle GCP =$

$\angle GCH - \angle PCH = \angle PCE - \angle PCH = \angle HCE$, 所以 $\triangle GCP \cong \triangle HCE$ (SAS), 所以 $\angle CHE = \angle CGP = 60^\circ$, $GP = HE = BP$. 又因为 $\angle ADC = 120^\circ$, 所以 $\angle ADH = 60^\circ = \angle CHE$, 所以 $HE \parallel DF$, 又因为 $EF \parallel HD$, 所以四边形 $HDEF$ 为平行四边形, 所以 $HE = DF$, 又因为 N 是 DE 的中点, 所以 N 也是 HF 的中点, 又因为 M 是 PF 的中点, 所以 MN 是 $\triangle FHP$ 的中位线, 所以 $MN = \frac{1}{2}HP$, $MN \parallel HP$. 因为 $\angle EKC = \angle HKP$, $\angle CEK = \angle PHK = 60^\circ$, 所以 $\angle ECK = \angle HPK$, 所以 $\angle HPE = \angle BCP$, 又因为 $\angle PHE = \angle CHE + \angle PHC = 120^\circ = \angle CBP$, $PE = CP$, 所以 $\triangle PHE \cong \triangle CBP$ (AAS), 所以 $HP = BC$, 所以 $MN = \frac{1}{2}HP = \frac{1}{2}BC = 5$, MN 的长度不变. 易证 $\triangle FQM \sim \triangle FIP$, 所以 $\frac{FQ}{FI} = \frac{FM}{FP} = \frac{MN}{HP} = \frac{1}{2}$, 所以 $IQ = \frac{1}{2}FI$. 因为 $\angle API = \angle GPB = 60^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, 所以 $\triangle API$ 为等边三角形. 所以 $AI = AP$, 设 $AI = AP = x$, 则 $BP = 6 - x = GP = HE = DF$, 所以 $FI = AD + DF - AI = 10 + (6 - x) - x = 16 - 2x$, 所以 $IQ = \frac{1}{2}FI = 8 - x$, 所以 $AQ = AI + IQ = 8$, AQ 为定值.

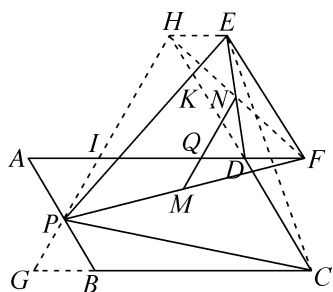


图 2

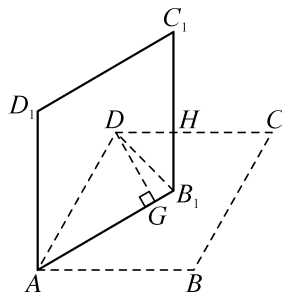
【解后反思】 本题考查平行四边形的判定与性质、图形的旋转、平行线的性质等. 第(2)小问看似复杂, 实则看到两个中点很容易想到用中位线去解决问题, 准确找到辅助线是解决问题的关键.

B20 泰州市 2023 年初中学业水平考试

1. B 2. C 3. A 4. D

5. C 提示: 若是一次函数, 则由 $x=1, y=4; x=2, y=2$, 得 $y=-2x+6$, 此时若 $x=4$, 则 $y=-2 \neq 1$, 故选项 A 错误. 若是反比例函数, 则 $a=xy=4$, 这与 $a < 0$ 不符, 故选项 B 错误. 若是二次函数, 则由待定系数法, 得 $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{7}{2}, c=7$, 故选项 C 正确, D 错误.

6. A 提示: 如图, 四边形 $AB_1C_1D_1$ 是旋转后的菱形, 则 $\angle B_1AD = 30^\circ$, $AB_1 = AD = 2$. 连接 DB_1 , 过点 D 作 $DG \perp AB_1$ 于点 G , 则 $DG = AD \cdot \sin \angle B_1AD = 1$, $AG = \sqrt{3}DG = \sqrt{3}$, 所以 $S_{\triangle AB_1D} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$, $B_1D^2 = DG^2 + B_1G^2 = 1^2 + (2 - \sqrt{3})^2 = 8 - 4\sqrt{3}$. 设 B_1C_1 交 CD 于点 H , 则重叠部分为四边形 $ADHB_1$. 因为 $\angle ADB_1 = \angle AB_1D = (180^\circ - 30^\circ) \div 2 = 75^\circ$, 所以 $\angle HB_1D = \angle HDB_1 = 120^\circ - 75^\circ = 45^\circ$, 所以 $\triangle B_1DH$ 为等腰直角三角形, 所以 $S_{\triangle B_1DH} = \frac{1}{2}B_1H^2 = \frac{1}{4}B_1D^2 = 2 - \sqrt{3}$, 所以重叠部分的面积为 $S_{\triangle AB_1D} + S_{\triangle B_1DH} = 3 - \sqrt{3}$.



【解后反思】 通过割补法计算重叠部分的面积是解决此类问题的通法. 本题中, 因旋转后的重叠部分是不规则四边形, 故分成两部分, 其一是顶角为 30° 的等腰三角形, 其二是等腰直角三角形, 从而作高后, 根据勾股定理计算得之. 与此类似的还有“弓形”“扇形”等几何形状, 均以此法计算.

7. $x \neq 2$ 8. 2.8×10^{-9} 9. $9:4$ 10. -6

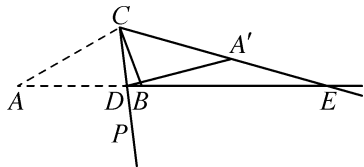
11. 2π 12. $<$ 13. -2

14. -4 (答案不唯一) 提示: 由条件可知, 该函数图

像的对称轴是直线 $x = -\frac{3}{2}$, 与 y 轴交于点 $(0, n)$, 且开口向上. 画出该函数图像的草图 (图略), 分析图像可知, 当 $n < 0$ 时, 该函数图像与 x 轴有一个交点在 y 轴右侧.

15. 9 提示:设该圆形城堡的外围半径为 r 里.由题意可知,向树的方向走的那条路线与该圆形城堡相切,所以由切线长定理可知,出南门向正东走的路程为 9 里.由等积法,得 $\frac{1}{2} \times 9 \times \sqrt{(9+6)^2 - 9^2} = \frac{1}{2} \times (9+6)r + \frac{1}{2} \times 9r$,解得 $r = \frac{9}{2}$,所以该城堡的外围直径为 9 里.

16. 45° 或 22.5° 或 67.5° 提示:由翻折可知, $\angle A = \angle CA'D = 30^\circ$, $\angle PCA = \angle PCA' = \alpha$. 当点 A' 在直线 AB 的下方时, $0^\circ < \alpha < 60^\circ$, $\angle A'ED = \angle A + \angle ACA' = 30^\circ + 2\alpha$, $\angle A'DE = 180^\circ - \angle CA'D - \angle A'ED = 120^\circ - 2\alpha$, 当 $DA' = DE$ 时, $\angle CA'D = \angle A'ED$, 即 $30^\circ = 30^\circ + 2\alpha$, 解得 $\alpha = 0^\circ$ (不合题意,舍去); 当 $A'D = A'E$ 时, $\angle A'ED = \angle A'DE$, 即 $30^\circ + 2\alpha = 120^\circ - 2\alpha$, 解得 $\alpha = 22.5^\circ$; 当 $ED = EA'$ 时, $\angle CA'D = \angle A'DE$, 即 $30^\circ = 120^\circ - 2\alpha$, 解得 $\alpha = 45^\circ$. 如图,当点 A' 在直线 AB 的上方时, $60^\circ < \alpha < 75^\circ$, $\angle DA'E = 180^\circ - \angle CA'D = 150^\circ$, 即 $\triangle A'DE$ 是钝角三角形,所以若 $\triangle A'DE$ 是等腰三角形,则只能是 $A'D = A'E$, 此时 $\angle A'DE = \angle A'ED = 15^\circ$, 所以 $\angle ADC = \angle A'DC = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 15^\circ) = 82.5^\circ$, 所以 $\alpha = \angle ACD = 180^\circ - \angle A - \angle ADC = 67.5^\circ$. 综上所述, α 的度数为 45° 或 22.5° 或 67.5° .



【解后反思】本题以翻折为背景,且对称轴是一条旋转的射线,因此要洞察旋转和对称的全过程,考虑问题要全面.要善于分类讨论.本题讨论有两条线索,且一明一暗,其一是 $\triangle A'DE$ 是等腰三角形,共有三种可能: $DA' = DE$, $A'D = A'E$, $ED = EA'$,故可用含 α 的代数式分别表示该三角形的三个内角,然后根据等腰三角形等边对等角的性质列方程解决问题;其二,随着对称轴 CD 的旋转,点 A' 与直线 AB 的位置产生变化,该三角形三个内角的计算方式产生变化,当点 A' 在直线 AB 的下方时, $\angle EDA' = \angle CEA - \angle CA'D$, 当点 A' 在直线 AB 的上方时, $\angle EDA' = \angle CA'D - \angle CEA$, 两种位置,答案不相同,故要分类讨论.要充分利用条件,减少不必要的讨论,简化解题过程,当点 A' 在直线 AB 的上方时, $\angle DA'E$ 为钝角, $\triangle A'DE$ 是等腰三角形只有一种可能,即 $A'D = A'E$, 故不需要讨论.

17. 解: (1) 原式 $= (x+3y)(x+3y-x+3y) = 6xy + 18y^2$.

(2) 去分母,得 $x = 2(2x-1) + 3$, 解得 $x = -\frac{1}{3}$. 经检验, $x = -\frac{1}{3}$ 是原方程的解.

18. 解: (1) 26 2022

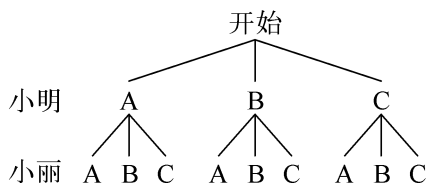
(2) 不同意小明的说法. 理由如下:

2021 年的增长率为 $\frac{352-136.7}{136.7} \times 100\% \approx$

157%, 2022 年的增长率为 $\frac{688.7-352}{352} \times$

100% $\approx 96\%$. 因 $96\% < 157\%$, 故不同意小明的说法.

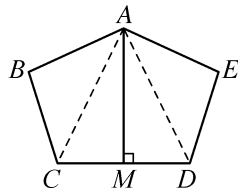
19. 解: 分别记舞蹈为 A, 情景剧为 B, 唱歌为 C. 画树状图如下:



由图可知,共有 9 种等可能的结果,其中小明、小丽选择不同类型的结果有 6 种,所以小明、小丽选择不同类型的概率为 $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

20. 解: ② ③ ① 如图所示. 证明如下:

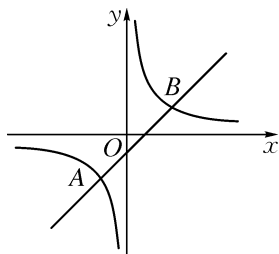
连接 AC, AD . 因为 AM 垂直平分 CD , 所以 $AC = AD$, 所以 $\angle ACD = \angle ADC$, 所以 $90^\circ - \angle ACD = 90^\circ - \angle ADC$, 即 $\angle CAM = \angle DAM$. 又因为 $AB = AE, BC = DE$, 所以 $\triangle ABC \cong \triangle AED$, 所以 $\angle BAC = \angle EAD$, 所以 $\angle CAM + \angle BAC = \angle DAM + \angle EAD$, 即 $\angle BAM = \angle EAM$, 所以 AM 平分 $\angle BAE$. (答案不唯一)



21. 解: (1) $-2 < x < 3$ (2) D

(3) 函数图像的简图如图所示. 设两函数图像的交点为 A, B. 由方程组 $\begin{cases} y = x - 1, \\ y = \frac{6}{x}, \end{cases}$ 得

$\begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = -3; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 2, \end{cases}$ 所以点 $A(-2, -3)$, $B(3, 2)$. 由简图可知, 当 $0 < x < 3$ 或 $-2 < x < 0$ 时符合题意. 又因为 $x = 0$ 时也符合题意, 所以不等式 $x^2 - x - 6 < 0$ 的解集为 $-2 < x < 3$.



22. 解: 过点 B 分别作 $BH \perp AE$ 于点 H , $BG \perp DE$ 于点 G . 由题意, 得 $\frac{BH}{AH} = \frac{1}{0.75} = \frac{4}{3}$. 设 $BH = 4t$ m ($t > 0$), 则 $AH = 3t$ m, 所以 $AB = 5t$ m = 10 m, 所以 $t = 2$, 所以 $AH = 6$ m, $BH = 8$ m. 易证四边形 $BGEH$ 是矩形, 所以 $GE = BH = 8$ m, 且可设 $BG = HE = x$ m. 在 $\text{Rt}\triangle BDG$ 中, 由 $\tan \alpha = \frac{DG}{BG}$, 得 $DG \approx \frac{1}{2}x$ m, 所以 $CG = CD + DG = (20 + \frac{1}{2}x)$ m. 由题意可知, 点 A, B, C 共线. 因为 $BG \parallel AE$, 所以 $\angle CBG = \angle BAH$, 所以 $\frac{CG}{BG} = \frac{BH}{AH}$, 即 $\frac{20 + \frac{1}{2}x}{x} = \frac{4}{3}$, 解之并检验, 得 $x = 24$, 所以 $DE = DG + GE = \frac{1}{2}x + 8 = 20$ (m).

答: 堤坝高为 8 m, 山高 DE 为 20 m.

23. 解: (1) 当 $0 < x < 1\,000$ 时, $y = (50 - 30)x = 20x$. 当 $x = 800$ 时, $y = 16\,000$, 所以当一次性销售 800 kg 时, 利润为 16 000 元.
(2) 当 $1\,000 \leq x < 1\,750$ 时, $y = [50 - 0.01(x - 1\,000) - 30]x = -0.01x^2 + 30x = -0.01(x - 1\,500)^2 + 22\,500$. 因为 $-0.01 < 0$, 所以当 $x = 1\,500$ 时, 有最大利润, 最大利润为 22 500 元.
(3) 当 $x = 1\,750$ 时, 售价为 $50 - 0.01 \times$

$(1\,750 - 1\,000) = 42.5$ (元/kg), 故当 $x \geq 1\,750$ 时, $y = (42.5 - 30)x = 12.5x$. 易知点 $A(1\,000, 20\,000)$, 所以 $x > 1\,000$. 从而由 $-0.01(x - 1\,500)^2 + 22\,500 = 22\,100$, 得 $x_1 = 1\,300, x_2 = 1\,700$; 由 $12.5x = 22\,100$, 得 $x = 1\,768$, 所以当一次性销售 1 300 kg 或 1 700 kg 或 1 768 kg 时, 利润为 22 100 元.

24. (1) 证明: 由折叠可知 $BD \perp AF$, 所以 $\angle BAF + \angle ABD = \angle ADB + \angle ABD = 90^\circ$, 所以 $\angle BAF = \angle ADB$. 易证 $\triangle ABF \sim \triangle DAB$, 所以 $\frac{AB}{DA} = \frac{BF}{AB}$. 因为 $AD = \sqrt{2}AB$, 所以 $BF = \frac{AB^2}{DA} = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$, 即 F 为 BC 的中点.

(2) 解: $\angle AGH = 120^\circ$. 理由如下:
连接 HF . 由折叠可知 $\angle GBP = \angle CBP$, $\angle CBP = \angle FHB$, 所以 $\angle GBP = \angle FHB$, 所以 $BG \parallel HF$, 所以 $\angle DGH = \angle GHF$, $\angle GFH = \angle AGD = 90^\circ$, 所以 $\tan \angle DGH = \tan \angle GHF = \frac{GF}{HF} = \frac{GF}{BF} = \sin \angle GBF = \sin \angle CBD = \frac{CD}{BD}$. 由条件可设 $CD = AB = a$ ($a > 0$), 则 $BC = AD = \sqrt{2}a$. 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, 由勾股定理, 得 $BD = \sqrt{3}a$, 所以 $\tan \angle DGH = \frac{CD}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\angle DGH = 30^\circ$, 所以 $\angle AGH = \angle AGD + \angle DGH = 120^\circ$.

25. 解: (1) 当 $m = 2, a = 4$ 时, 点 $A(2, 0)$, $B(-2, 0)$, $y_1 = \frac{2}{x}, y_2 = -\frac{2}{x}$, 所以点 $E(2, 1)$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形, 所以 $AD = AB = 4$. 因为点 A, B 在 x 轴上, 点 C, D 在 x 轴上方, 所以点 $D(2, 4), H(-\frac{1}{2}, 4), G(\frac{1}{2}, 4)$. 因为函数 y_3 的图像经过 E, G 两点, 所以由待定系数法可知, 函数 y_3 的表达式为 $y_3 = -2x + 5$, 所以点 $P(0, 5)$, 所以

$$S_{\triangle PGH} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}.$$

(2) $\triangle PGH$ 的面积不变,理由如下:

因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AD = AB = m - (m - a) = a$. 由条件可知,点 $E(m, 1)$, $D(m, a)$, $G(\frac{m}{a}, a)$, $H(\frac{m-a}{a}, a)$. 所以由待定系数法可知,函数 y_3 的表达式

为 $y = -\frac{a}{m}x + a + 1$, 所以点 $P(0, a + 1)$, 所以

$$S_{\triangle PGH} = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{a} - \frac{m-a}{a} \right) \times 1 = \frac{1}{2}.$$

(3) 直线 PH 与边 BC 的交点在函数 y_2 的图像上. 理由如下:

由(2)可知,点 $P(0, a + 1)$, $H(\frac{m-a}{a}, a)$, 所以

直线 PH 的函数表达式为 $y = \frac{ax}{a-m} + a + 1$.

当 $x = m - a$ 时, $y = 1$, 即直线 PH 与边 BC 的交点坐标为 $(m - a, 1)$. 将 $x = m - a$, $y = 1$ 代入 $y_2 = \frac{m-a}{x}$, 发现等式成立, 所以直线

PH 与边 BC 的交点在函数 y_2 的图像上.

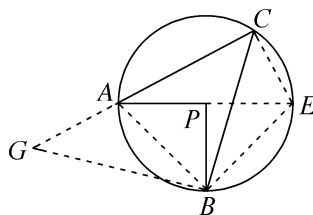
26. (1) 解: ①由题易得 $\angle AOB = 2\angle C$, 所以 $\angle AOB + \angle C = 3\angle C = 135^\circ$, 所以 $\angle C = 45^\circ$.

②连接 AB . 因为 $\angle AOB = 2\angle C = 90^\circ$, $OA = OB = 5$, 所以 $AB = \sqrt{2}OA = 5\sqrt{2}$. 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H . 易证 $\triangle ACH$ 为等腰直角三角形, 所以 $AH = CH = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = 4\sqrt{2}$. 在 $Rt\triangle ABH$ 中, 由勾股定理, 得 $BH = 3\sqrt{2}$, 所以 $BC = BH + CH = 7\sqrt{2}$.

(2) 证明: 延长 AP 交圆于点 D , 连接 DB , 则 $\angle D = \angle C$. 因为 $\angle APB = 2\angle C$, 所以 $\angle APB = 2\angle D = \angle D + \angle DBP$, 所以 $\angle D = \angle DBP$, 所以 $PD = PB$. 因为 $PA = PB$, 所以 $PA = PB = PD$, 所以点 P 是 A, B, D 三点所确定的圆的圆心, 即点 P 是题图中所在圆的圆心.

(3) 证明: 如图, 过点 B 作 $BG \perp CB$ 交 CA 的延

长线于点 G , 连接 AB . 因为 $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle APB = 45^\circ$, 所以 $CB = BG$, $\angle G = 45^\circ$, $CG = \sqrt{2}CB$. 因为 $CD = \sqrt{2}CB - CA$, 所以 $CD = CG - CA = GA$. 将 $\triangle ABG$ 绕点 B 顺时针旋转 90° , 得 $\triangle EBC$, 连接 AE , 所以 $AB = EB$, $\angle ABE = 90^\circ$. 所以 $\angle BAE = 45^\circ$. 因为 $AP = PB$, $\angle APB = 90^\circ$, 所以 $AB = EB = \sqrt{2}AP$, $\angle BAP = 45^\circ$, 所以点 E 在 AP 延长线上且 $AE = \sqrt{2}AB = 2AP$. 因为点 P 是圆心, 所以 E 是 AP 的延长线与 $\odot P$ 的交点, 即 E 是定点. 由旋转可知, $CE = GA = CD$, 所以随着点 C 的运动, 以点 C 为圆心, CD 的长为半径作弧, 该弧与 $\odot P$ 有两个交点, 其中一个一直与点 E 重合, 即满足条件的所有点 D 中必有一个点的位置始终不变.



【解后反思】 本题是教材定理的拓展与变形, 考查了逻辑推理能力和转化与化归的数学思想. 在教材中, 圆周角定理是重要的结论, 其证明过程十分详细, 采用了从特殊到一般的数学思想, 即“圆心在圆周角一边上”“圆心在圆周角内部”“圆心在圆周角外部”等三种情形分别证明得之. 本题中“逆向思考”改编为“逆命题”, 可通过知识迁移的思维方法, 将圆周角 ($\angle C$) 化归至“圆心在圆周角一边上”, 从而利用“三角形内外角关系”转化而证得, 关键是如何利用“圆看作是到定点距离等于定长的点的集合”这一理论依据. 本题的拓展应用具有一定的探究性, 关键是如何构造某线段长 (其中一 endpoint 为定点) 等于 $\sqrt{2}CB - CA$, 这可分两步实现, 首先由等腰直角三角形的边边关系, 构造 $\sqrt{2}CB$, 其次是通过“截长补短”法即可得解. 其中题图 2 暗示了解题的思维方向, 可谓是“借我云梯上青天”.

B21 南京市 2023 年初中学业水平考试

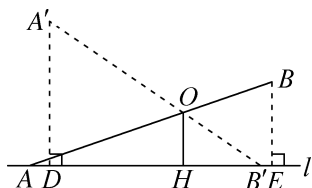
1. A 2. C 3. B 4. D

5. C 提示: 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H . 设 $BH = x$ 里, 则 $CH = (14 - x)$ 里. 因为 $AH \perp BC$, 所以

$\angle AHB = \angle AHC = 90^\circ$, 所以 $AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2$, 即 $13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$, 解得 $x = 5$. 所以 $AH = 12$ (负值舍去), 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \times 14 \times 12 = 84$ (平方里).

【方法总结】过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H , 把一个三角形转化成两个含有公共边的直角三角形, 然后借助这条公共边, 运用勾股定理寻找等量关系, 这是一种较常见的解题方法.

6. A 提示: 如图, 分别过点 A', B 作 $A'D \perp l$ 于点 D , $BE \perp l$ 于点 E , 则 $A'D = 90$ cm, $BE = 60$ cm. 由条件可设 $OA' = OA = a$ cm, $OB' = OB = b$ cm. 因为 $OH \perp l$, 所以 $A'D \parallel BE \parallel OH$, 所以 $\triangle OB'H \sim \triangle A'B'D$, $\triangle AOH \sim \triangle ABE$. 所以 $\frac{OH}{A'D} = \frac{OB'}{A'B'}$, $\frac{OH}{BE} = \frac{AO}{AB}$, 所以 $\frac{OH}{90} = \frac{b}{b+a}$ ①, $\frac{OH}{60} = \frac{a}{a+b}$ ②. ①+②, 得 $\frac{OH}{90} + \frac{OH}{60} = \frac{b}{b+a} + \frac{a}{a+b}$, 即 $\frac{OH}{90} + \frac{OH}{60} = 1$. 所以 $OH = 36$. 所以支撑点 O 到地面的高度 OH 是 36 cm.



7. 2 2 8. $x \neq 2$ 9. $3\sqrt{2}$ 10. $3(a-1)^2$

11. $\frac{1}{16}$ 提示: 原式 $= \left[2^3 \times 4^3 \times \left(\frac{1}{8}\right)^3 \right] \times 4 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 1 \times 4 \times \frac{1}{64} = \frac{1}{16}$.

12. 35 提示: 因为这组数据中已知数据 32, 37 出现次数最多, 都出现了 2 次, 而这组数据的众数为 32, 所以未知数 $a = 32$. 把这 8 个数按从小到大的顺序排列: 32, 32, 32, 34, 36, 37, 37, 38, 所以这组数据的中位数为 $\frac{34+36}{2} = 35$.

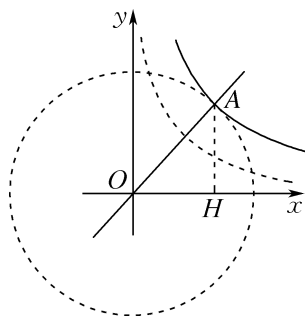
13. $1.5 \leq v \leq 1.8$ 提示: 由题意可知甲车的速度为 $18 \div 20 = 0.9$ (km/min). 设甲车出发 t min 后乙车追上甲车, 则 $0.9t = v(t - 20)$, 即 $v = \frac{0.9t}{t-20} = \frac{0.9(t-20)+18}{t-20} = 0.9 + \frac{18}{t-20}$. 因为 v 随 t 的增大而减小, $40 \leq t \leq 50$, 所以当 $t = 50$ 时, v 取得最小值, 最

小值为 $0.9 + \frac{18}{50-20} = 1.5$; 当 $t = 40$ 时, v 取得最大值, 最大值为 $0.9 + \frac{18}{40-20} = 1.8$. 所以乙车的速度的取值范围是 $1.5 \leq v \leq 1.8$.

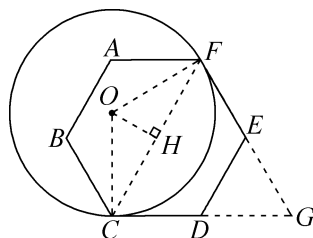
14. $0 < k \leq \frac{9}{2}$ 提示: 因为 $OA = 3$, 所以点 A 在以点 O

为圆心, 3 为半径的 $\odot O$ 上. 又因为点 A 在第一象限, 所以点 A 在该圆位于第一象限的一段弧上. 如图, 由图可知当反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像与 $\odot O$ 有且只有一个交点时, k 的值最大. 过点 A 作 $AH \perp x$ 轴于点 H . 由于 $\odot O$ 与双曲线都关于直线 $y = x$ 对称, 所以整个图形关于直线 $y = x$ 对称, 所以 $\angle AOH = 45^\circ$.

所以 $OH = AH = OA \cdot \sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 所以点 A 的坐标为 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. 所以 k 的最大值为 $k = \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2}$. 因为 $k > 0$, 所以 k 的取值范围是 $0 < k \leq \frac{9}{2}$.



15. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 提示: 如图, 连接 OC, OF, CF , 延长 FE, CD 交于点 G , 过点 O 作 $OH \perp CF$ 于点 H , 则 $CH = HF = \frac{1}{2} CF$. 由正六边形的性质可知 $CD = DE = EF = 2$, $\angle DEG = \angle EDG = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. 所以 $\triangle DEG$ 为等边三角形, 所以 $DG = EG = DE$, 所以 $DG = DC$, $EG = EF$, 所以 $CF = 2DE = 4$, $DE \parallel CF$, 所以 $HF = \frac{1}{2} CF = 2$, $\angle CFG = \angle DEG = 60^\circ$. 因为 EF 是 $\odot O$ 的切线, 所以 $\angle OFE = 90^\circ$, 所以 $\angle OFH = 30^\circ$. 因为 $\angle OHF = 90^\circ$, 所以 $OF = \frac{FH}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.



【解后反思】求出 CF 的长是本题的解题关键. 求 CF 长的方法有很多, 除提示中提到的外还可以过点 E 作 $EG \parallel CD$ 交 CF 于点 G , 把 CF 的长转化成 $CG + FG$, 分别求出 CG , FG 的长; 也可以过点 D 作 $DG \perp CF$ 于点 G , 过点 E 作 $EH \perp CF$ 于点 H , 把 CF 的长转化成 $CG + GH + HF$, 分别求出 CG, GH, HF 的长.

16. $\frac{25}{7}$ 提示: 过点 E 作 $EH \perp BC$ 于点 H , 则 $\angle BHE = \angle EHC = 90^\circ$. 因为 CE 是折痕, 所以 $\angle BCE = \angle B'CE$, $BC = CB' = 4 + 1 = 5$. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $\angle B = \angle D$, $CD = BC = 5$, $AD \parallel BC$, 所以 $\angle BCF = \angle CFD = 90^\circ$, 所以 $DF = \sqrt{CD^2 - CF^2} = 3$, $\angle BCE = \angle B'CE = \frac{1}{2} \angle BCF = 45^\circ$. 所以 $\angle HEC = 90^\circ - \angle BCE = 45^\circ = \angle BCE$, 所以 $CH = EH$. 因为 $\angle B = \angle D$, $\angle BHE = \angle DFC = 90^\circ$, 所以 $\triangle BHE \sim \triangle DFC$. 所以 $\frac{BH}{EH} = \frac{DF}{CF} = \frac{3}{4}$, 所以可设 $BH = 3k (k > 0)$, 则 $CH = EH = 4k$. 因为 $\angle BHE = 90^\circ$, 所以 $BE = \sqrt{BH^2 + EH^2} = 5k$. 因为 $BC = 5$, 所以 $3k + 4k = 5$, 解得 $k = \frac{5}{7}$. 所以 $BE = 5 \times \frac{5}{7} = \frac{25}{7}$.

【方法归纳】①当已知直角三角形(如本题的 $Rt\triangle CDF$)的某个锐角(如本题的 $\angle D$)和与未知线段(如本题的 BE)相关的角(如本题的 $\angle B$)相等时, 我们通常过未知线段的端点作垂线, 构造相似三角形求解. ②在运用相似三角形的判定与性质求线段的长时, 常利用方程思想, 通过设未知数表示未知线段的长, 从而构造关于未知数的方程求解, 如本题就是根据相似三角形的性质得到 $\frac{BH}{EH} = \frac{3}{4}$, 设 $BH = 3k$, 由 $BC = 5$, 构造关于 k 的方程求解的.

17. 解: 原式 $= \frac{x^2 - 9}{x^2} \cdot \frac{x}{x - 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x^2} \cdot \frac{x}{x - 3}$.

$$\frac{x}{x - 3} = \frac{x + 3}{x}.$$

18. 解: 解 $2x - 1 < 0$, 得 $x < \frac{1}{2}$. 解 $\frac{x - 1}{4} < \frac{x}{3}$, 得 $x > -3$. 所用不等式组的解集为 $-3 < x < \frac{1}{2}$, 整数解是 $-2, -1, 0$.

19. 证明: 连接 AC 交 BD 于点 O . 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 $AO = OC, BO =$

DO . 因为 $AM \parallel CN$, 所以 $\angle EAO = \angle FCO$.

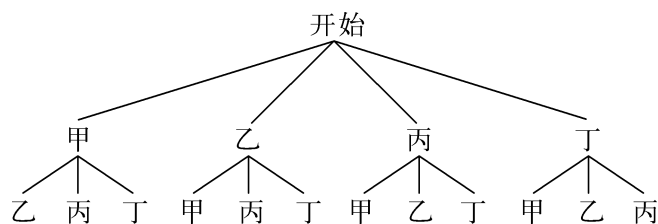
在 $\triangle AEO$ 与 $\triangle CFO$ 中, 因为 $\begin{cases} \angle EAO = \angle FCO, \\ AO = CO, \\ \angle AOE = \angle COF, \end{cases}$

所以 $\triangle AEO \cong \triangle CFO$, 所以 $OE = OF$. 因为 $BO = DO$, 所以 $BO - OE = OD - OF$, 即 $BE = DF$.

20. 解: (1) ①③

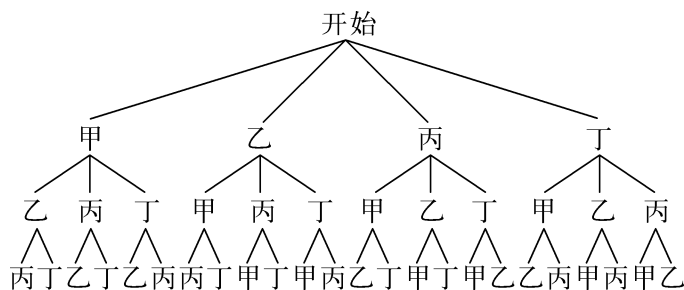
(2) 根据题统计图, 可得从 2011 年到 2022 年, 我国 GDP 一直在稳步增长中; 从 2012 年到 2022 年, 我国 GDP 增加的幅度最大的一年是 2021 年. (答案不唯一)

21. 解: (1) 画树状图如图所示.



由图可知, 共有 12 种等可能的结果, 其中恰好是甲、乙的结果有 2 种, 所以恰好是甲、乙的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

- (2) $\frac{1}{2}$ 提示: 画树状图如图所示.



由图可知, 共有 24 种等可能的结果, 其中甲、乙在其中的结果有 12 种, 所以甲、乙在其中的概率为 $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

22. 解: 设该学生接温水的时间为 x s, 则该学生接的开水体积为 $(280 - 20x)$ mL. 根据题意, 得 $20x \times (60 - 30) = (280 - 20x) \times (100 - 60)$, 解得 $x = 8$. 所以 $280 - 20 \times 8 = 120$ (mL), 所以 $120 \div 15 = 8$ (s).

答: 该学生接温水的时间为 8 s, 接开水的时间为 8 s.

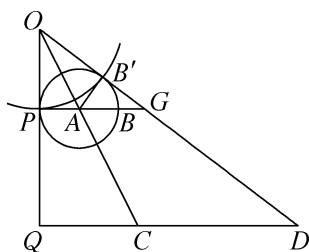
23. 解: 延长 DC 交直线 AB 于点 H . 设 $CH = x$ m, $BH = y$ m. 根据题意可知, 无人机在点 C 处时离地面的高度为线段 CH 的长. 在 $\text{Rt}\triangle BDH$ 中, 因为 $\angle DHB = 90^\circ$, 所以 $\tan \angle DBH = \frac{DH}{BH} = \frac{CD+CH}{BH}$, 即 $\frac{5+x}{y} \approx 2.00$, 所以 $x = 2y - 5$ ①. 在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中, 因为 $\angle AHC = 90^\circ$, 所以 $\tan \angle CAH = \frac{CH}{AH} = \frac{CH}{AB+BH}$, 即 $\frac{x}{10+y} \approx 0.75$, 所以 $4x - 3y = 30$ ②. 联立①②, 解得 $y = 10, x = 15$.

答: 无人机在点 C 处时离地面的高度为 15 m.

24. 解: (1) 过点 O 作 $OF \perp CD$ 于点 F , 设 OF 交 AB 于点 E . 根据题意可知 $\triangle OAB \sim \triangle OCD$. 因为 OE, OF 分别是 $\triangle OAB, \triangle OCD$ 对应边上的高, 所以 $\frac{AB}{CD} = \frac{OE}{OF}$, 所以 $CD = \frac{AB \cdot OF}{OE}$. 因为 AB, OE, OF 为定值, 所以线段 CD 的长度为定值.

(2) ①如图, AB' 就是 CD 取最大值的位置.

提示: 因为点 A 固定, 所以点 A 的影子点 C 固定, 所以若想 CD 最大, 需要点 D 离点 C 最远. 因为点 B 在以点 A 为圆心, AB 为半径的 $\odot A$ 上, 所以离点 C 最远的点 D 与光源 O 的连线与 $\odot A$ 相切于点 B' , 且点 D 在点 C 右侧. 作法: 以点 A 为圆心, AB 的长为半径作 $\odot A$, 以点 O 为圆心, OP 的长为半径画弧交 $\odot A$ 的另一端点为 B' , 连接 OB' 并延长交 QC 于点 D , 则此时 CD 的长度最大.



②80 提示: 因为 $AP = AB', OP = OB', OA$ 为公共边, 易得 $\triangle POA \cong \triangle B'OA$, 所以 $\angle AB'O = \angle APO = 90^\circ$, 所以 OD 切 $\odot A$ 于点 B' . 设 $AG = x$ cm, 则 $PG = (x + 18)$ cm. 易证 $\triangle AB'G \sim \triangle OPG$, 所以 $\frac{AG}{OG} = \frac{B'G}{PG} = \frac{AB'}{OP} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, 所以 $OG = 2AG = 2x$ cm, 所以

$B'G = (2x - 36)$ cm, 所以 $\frac{2x-36}{x+18} = \frac{1}{2}$, 解得 $x = 30$. 同理于(1), 得 $CD = \frac{OQ \cdot AG}{OP} = \frac{(36+60) \times 30}{36} = 80$ (cm).

25. (1) 证明: 在二次函数 $y = ax^2 - 2ax + 3$ 的表达式中, 令 $y = 0$, 得 $ax^2 - 2ax + 3 = 0$. 因为 $a \neq 0$, 所以这个等式可以看成关于 x 的一元二次方程, 且其根的判别式为 $(-2a)^2 - 4 \times a \times 3 = 4a(a-3)$. 又由题意可知 $a < 0$, 所以 $4a < 0, a-3 < 0$, 所以 $4a(a-3) > 0$. 所以这个关于 x 的方程有两个不相等的实数根, 所以二次函数的图像与 x 轴有两个交点.

(2) 证明: 因为当 $a = -1$ 时, 二次函数的表达式为 $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$, 所以当 $-1 < x < 0$ 时, y 随 x 的增大而增大. 当 $x = -1$ 时, $y = 0$. 所以当 $-1 < x < 0$ 时, y 一定大于 0.

(3) $a > 3$ 或 $a < -1$ 提示: 由(1)可知, 当 $a < 0$ 时, 二次函数的图像与 x 轴有两个交点; 同理, 当 $a > 0$ 时, 不等式 $4a(a-3) > 0$, 所以 $a-3 > 0$, 解得 $a > 3$, 故当 $a > 3$ 时, 二次函数的图像与 x 轴有两个交点. 分两种情况: ①当 $a < 0$ 时, 因为 $-1 < x_1 < x_2 < 4$, 所以可得符合题意的图像草图如图 1, 由图可知, 当 $x = -1$ 时, $y < 0$, 即 $a + 2a + 3 < 0$; 当 $x = 4$ 时, $y < 0$,

$$\text{即 } 16a - 8a + 3 < 0, \text{ 所以 } \begin{cases} a + 2a + 3 < 0, \\ 16a - 8a + 3 < 0, \\ a < 0, \end{cases} \text{ 解得 } a < -1.$$

②当 $a > 3$ 时, 因为 $-1 < x_1 < x_2 < 4$, 所以当 $x = -1$ 时, $y > 0$, 即 $a + 2a + 3 > 0$; 当 $x = 4$ 时, $y > 0$,

$$\text{即 } 16a - 8a + 3 > 0, \text{ 所以 } \begin{cases} a + 2a + 3 > 0, \\ 16a - 8a + 3 > 0, \\ a > 3, \end{cases} \text{ 解得 } a > 3.$$

综上所述, a 的取值范围为 $a > 3$ 或 $a < -1$.

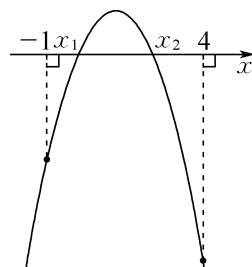


图 1

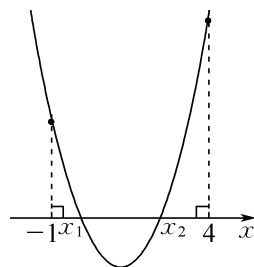


图 2

26. (1) 证明: 连接 BF . 因为 $OD \perp AC$, 所以 $\widehat{AF} = \widehat{CF}$, 所以 $\angle ABF = \angle CBF = \angle CAF$, 所以

$\angle ABC = \angle ABF + \angle CBF = 2\angle CAF$. 因为 $AB = AC$, 所以 $\angle ACB = \angle ABC = 2\angle CAF$. 又因为 $\angle ACB = \angle CAF + \angle G$, 所以 $\angle CAF = \angle G$, 所以 $AC = CG$.

(2) 解: 连接 AE . 设 $\angle CAF = \angle G = x^\circ$, 则 $\angle ABC = \angle ACB = 2\angle CAF = 2x^\circ$. 因为 $BE = CG = AC = BA$, 所以 $\angle BEA = \angle BAE$, 所以 $\angle ABC = \angle BEA + \angle BAE = 2\angle BEA$, 所以 $\angle BEA = \angle BAE = x^\circ$, 即 $\angle AEC = x^\circ$. 因为 $OD \perp AC$, 所以 $AD = CD$, 所以 $EA = EC$, 所以 $\angle EAC = \angle ECA = 2x^\circ$. 因为 $\angle EAC + \angle ECA + \angle AEC = 180^\circ$, 所以 $2x + 2x + x = 180$, 解得 $x = 36$. 所以 $\angle BAC = \angle EAC - \angle EAB = 2x^\circ - x^\circ = x^\circ = 36^\circ$.

(3) 解: 设 $BE = y$. 由(1)可设 $AB = AC = CG = x$. 因为 $AB + AC > BC$, 所以 $x + x > 6$, 解得 $x > 3$. 由点 E 在线段 AC 的垂直平分线上, 可得 $\angle EAC = \angle ECA = \angle ABC$. 所以 $\triangle ACB \sim \triangle ECA$, 所以 $\frac{AC}{EC} = \frac{CB}{CA}$, 所以 $\frac{x}{EC} = \frac{6}{x}$, 所以 $EC = \frac{1}{6}x^2$. 分两种情况: ①当 $3 < x \leq 6$ 时, 点 E 在线段 BC 上, $BE = BC - EC$, 所以 $y = -\frac{1}{6}x^2 + 6$. 因为 $-\frac{1}{6} < 0$, 对称轴为 y 轴, 所以当 $3 < x \leq 6$ 时, y 随 x 的增大而减小. 因为当 $x = 3$ 时, $y = 4.5$; 当 $x = 6$ 时, $y = 0$, 所以当 $3 < x \leq 6$ 时, y 随 x 的增大从 4.5(不包括)减小到 0. ②当 $x > 6$ 时, 点 E 在 CB 延长线上, $BE = EC - BC$, 所以 $y = \frac{1}{6}x^2 - 6$. 因为 $\frac{1}{6} > 0$, 抛物线的对称轴为 y 轴, 所以当 $x > 6$ 时, y 随 x 的增大而增大. 因为当 $x = 6$ 时, $y = 0$, 所以当 $x > 6$ 时, y 随 x 的增大从 0(不包括)不断增大.

综上所述, 当 $3 < CG \leq 6$ 时, BE 随着 CE 的增大从 4.5(不包括)减小到 0; 当 $CG > 6$ 时, BE 随着 CG 的增大从 0(不包括)不断增大.

27. (1) 解: 如图 1, $\triangle A'B'C$ 即为所求作的三角形.

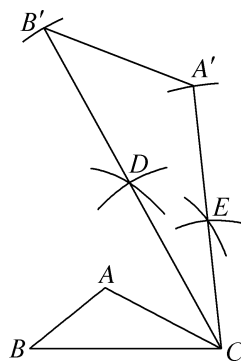


图 1

提示: 作法: 以点 B 为圆心, BC 为半径画弧, 以点 C 为圆心, BC 为半径画弧, 两弧在 BC 的上方交于点 D , 分别以点 A, C 为圆心, AC 为半径画弧, 两弧交于点 E ; 延长 CD 至点 B' , 使 $DB' = CD$, 延长 CE 至点 A' , 使 $A'E = CE$, 连接 $A'B'$. 则 $\triangle A'B'C$ 即为所求作的三角形.

(2) 证明: 由题意易得 $\triangle EBD \sim \triangle ABC$, 所以 $\angle EBD = \angle ABC$, $\frac{BE}{BA} = \frac{BD}{BC}$, 所以 $\frac{BE}{BD} = \frac{BA}{BC}$, $\angle EBD + \angle DBA = \angle ABC + \angle DBA$, 即 $\angle EBA = \angle DBC$. 所以 $\triangle EBA \sim \triangle DBC$, 所以 $\frac{AE}{CD} = \frac{BA}{BC}$. 同理可得 $\triangle FDC \sim \triangle ABC$, 所以 $\frac{FD}{DC} = \frac{AB}{BC}$. 所以 $\frac{AE}{CD} = \frac{DF}{CD}$, 所以 $AE = DF$. 同理可得 $DE = AF$, 所以四边形 $AFDE$ 是平行四边形.

(3) 解: ①如图 2, 点 D 即为所求. 作法如下: 以 BC 为边在 BC 上方作等边三角形 GBC ; 作 $\angle CBG$ 的平分线 BP ; 过点 C 作 $CQ \perp BC$, CQ 与 BP 交于点 D . 提示: 如图 3, 若四边形 $AFDE$ 为正方形, 则 $\angle EDF = 90^\circ$, $DE \parallel AF$, 所以 $\angle EDB + \angle BDC + \angle CDF = 90^\circ$, $\angle EDB = \angle DBF$. 由(2), 得 $\triangle EBD \sim \triangle ABC \sim \triangle FDC$, 所以 $\angle EDB = \angle ACB$, $\angle CDF = \angle CBA$, 所以 $\angle DBF + \angle BDC + \angle CBA = 90^\circ$, 即 $\angle DBC + \angle BDC = 90^\circ$, 所以 $\angle DCB = 90^\circ$. 因为 $\angle BAC = 150^\circ$, 所以 $\angle ABC + \angle ACB = 30^\circ$, 所以 $\angle ABC + \angle EDB = 30^\circ$, 所以 $\angle ABC + \angle DBA = 30^\circ$, 即 $\angle DBC = 30^\circ$. 从而由(1)想到了先以 BC 为边作等边三角形 BCG , 再作 $\angle CBG$ 的平分线, 得到 30° 的 $\angle DBC$, 再过点 C 作直线 BC 的垂线, 得到 90° 的 $\angle DCB$, 两线的交点即为点 D .

②AE 的长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 提示:由作法的思路,得

$\angle EBD = \angle ABC$, 所以 $\angle ABE = \angle DBC = 30^\circ$, 又因为四边形 AFDE 为正方形, 所以 $\angle EAB = 180^\circ - \angle EAF = 90^\circ$, 所以在 $\text{Rt}\triangle EAB$ 中, $AE = AB \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} AB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

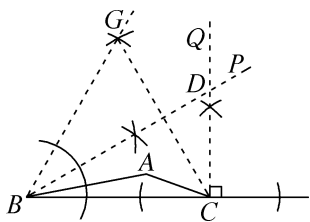


图 2

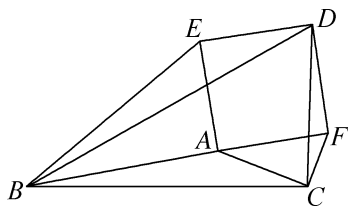


图 3

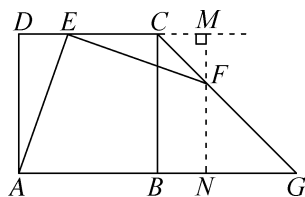
【方法点拨】解第(3)小题这种难度较大的压轴题时,如果我们孤立地去做,就会觉得无从下手,但是如果把这个题目连贯起来看,就能够打开思路了.就本小题而言,在第(2)小题的基础上,若 $\square AFDE$ 为正方形,则 $\angle EDF = 90^\circ$,再运用相似,就可以推导出点 D 为 30° 角与 90° 的角的边所在直线的交点,同时第(1)小题提示了我们在作图时,可能会用到等边三角形,故考虑通过作等边三角形来得到 30° 的角.

C22 重庆市 2024 年中考真题(A 卷)精编

- B 提示:由题,得 $m = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} = \sqrt{12}$. 因为 $\sqrt{9} < \sqrt{12} < \sqrt{16}$, 即 $3 < \sqrt{12} < 4$, 所以实数 m 的取值范围是 $3 < m < 4$.
- B 提示:由题可知,①(第 1 种)中氢原子的个数为 $4 = 1 \times 2 + 2$;②(第 2 种)中氢原子的个数为 $6 = 2 \times 2 + 2$;③(第 3 种)中氢原子的个数为 $8 = 3 \times 2 + 2 \dots$ 依此类推,第 n 种化合物的分子结构模型中氢原子的个数为 $(2n + 2)$ 个. 当 $n = 10$ 时, $2n + 2 = 22$, 即第 10 种化合物的分子结构模型中氢原子的个数为 22.
- D 提示:连接 AC, BD 交于点 O . 由中心对称性,可知, O 即为两弧的唯一公共点,所以 $AC = 2AD = 8$. 在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, 由勾股定理,得 $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 4\sqrt{3}$. 所以 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{矩形 } ABCD} - 2S_{\text{扇形}} = S_{\text{矩形 } ABCD} - S_{\text{半圆}} =$

$$AD \cdot CD - \frac{\pi}{2} AD^2 = 16\sqrt{3} - 8\pi.$$

- A 提示:如图,过点 F 作 $MN \perp CD$, 交 DC 的延长线于点 M , 交 BG 于点 N , 则 $\angle M = 90^\circ$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形, 所以 $AB \parallel CD, AD = CD, \angle D = 90^\circ$, 所以 $\angle FNG = \angle M = 90^\circ, \angle DAE + \angle AED = 90^\circ$. 由旋转的性质, 得 $AE = EF, \angle AEF = 90^\circ$, 所以 $\angle MEF + \angle AED = 90^\circ$, 所以 $\angle DAE = \angle MEF$. 易证 $\triangle ADE \cong \triangle EMF$ (AAS), 所以 $DE = MF, AD = EM = CD$, 所以 $CD - CE = EM - CE$, 即 $DE = MC = MF$. 易证四边形 $ADMN$ 为矩形, 所以 $MN = AD = EM$, 所以 $MN - MF = EM - MC$, 即 $NF = CE$. 又因为 $MC = MF$, 所以 $\angle NFG = \angle MFC = \angle MCF = 45^\circ$. 易得 $\triangle FNG$ 为等腰直角三角形, 所以 $\frac{FG}{CE} = \frac{FG}{NF} = \sqrt{2}$.



- D 提示:由题可知, $0 \leq n \leq 4$ (n 为自然数). 分 5 种情况讨论: 当 $n = 4$ 时, $4 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 5$, 即 $a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1$. 因为 a_4 为正整数, 所以 $a_4 = 1, a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$, 此时满足条件的整式 M 有 x^4 . 当 $n = 3$ 时, $3 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 5$, 即 $a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 2$. 因为 a_3 为正整数, 所以 $a_3 = 1$ 或 $a_3 = 2$. 则 (a_3, a_2, a_1, a_0) 为 $(2, 0, 0, 0)$ 或 $(1, 1, 0, 0)$ 或 $(1, 0, 1, 0)$ 或 $(1, 0, 0, 1)$, 此时满足条件的整式 M 有 $2x^3, x^3 + x^2, x^3 + x, x^3 + 1$. 同理当 $n = 2$ 时, $a_2 + a_1 + a_0 = 3$. 因为 a_2 为正整数, 所以 $a_2 = 1$ 或 $a_2 = 2$ 或 $a_2 = 3$, 则 (a_2, a_1, a_0) 为 $(3, 0, 0)$ 或 $(2, 1, 0)$ 或 $(2, 0, 1)$ 或 $(1, 2, 0)$ 或 $(1, 0, 2)$ 或 $(1, 1, 1)$, 此时满足条件的整式 M 有 $3x^2, 2x^2 + x, 2x^2 + 1, x^2 + 2x, x^2 + 2, x^2 + x + 1$. 当 $n = 1$ 时, $a_1 + a_0 = 4$, 则 (a_1, a_0) 为 $(4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3)$, 此时满足条件的整式 M 有 $4x, 3x + 1, 2x + 2, x + 3$; 当 $n = 0$ 时, $a_0 = 5$, 此时满足条件的整式 M 有 5. 综上所述, 满足条件的单项式有 $x^4, 2x^3, 3x^2, 4x, 5$, 故①符合题意; 不存在任何一个 n , 使得满足条件的整式 M 有且只有 3 个, 故②符合题意; 满足条件的整式 M 共有 $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ 个, 故③符合题意.

- 3 提示: 因为 $DE \parallel BC$, 所以 $\angle D = \angle ACB, \angle E = \angle CFA = \angle CAB$, 所以 $\triangle ACF \sim \triangle ADE$, 所以 $\frac{AC}{AD} =$

$\frac{CF}{DE}$. 因为 $CD=AC$, 所以 $\frac{CF}{DE} = \frac{AC}{AC+CD} = \frac{1}{2}$, 所以 $DE=2CF=2$, 所以 $AD=2AC=2CD=2DE=4$. 易证 $\triangle ABC \cong \triangle EAD$ (ASA), 所以 $BC=AD=4$, 所以 $BF=BC-CF=3$.

7. 16 提示: 由题, 得关于 x 的不等式组的解集为 $\frac{a-2}{3} \leq x < 4$. 因为该不等式组至少有 2 个整数解, 所以 $\frac{a-2}{3} \leq 2$, 解得 $a \leq 8$. 由题, 得关于 y 的分式方程的解为 $y = \frac{a-2}{2} \left(\frac{a-2}{2} \neq 1 \right)$. 因为该分式方程的解为非负整数, 所以 $\frac{a-2}{2} \geq 0$, 所以 $2 \leq a \leq 8$. 又因为 $\frac{a-2}{2} \neq 1$ 且 $a-2$ 能被 2 整除, 所以所有满足条件的整数 a 的值有 2, 6, 8, 其和为 $8+6+2=16$.

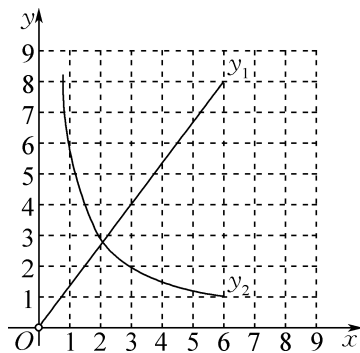
8. 82 4 564 提示: 设 $m=10a+b$, 则 $n=10a+8-b$ ($1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 8$, 且 a, b 为整数), 所以要使“方减数”最小, 需 $a=1, b=0$, 则 $m=10, n=18$, 此时 $m^2-n=82$. 由题, 得 $B=100(10a+b)+10a+8-b=1010a+99b+8$. 因为 B 除以 19 余数为 1, 所以 $B-1=1010a+99b+7$ 能被 19 整除, 即 $\frac{B-1}{19} = 53a+5b+\frac{3a+4b+7}{19}$ 为整数. 又因为 $2m+n=k^2$ (k 为整数), 即 $2(10a+b)+10a+8-b=30a+b+8$ 是完全平方数. 因为 $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 8$, 且 a, b 为整数, 所以 $\begin{cases} a=3, \\ b=2, \end{cases} \begin{cases} a=6, \\ b=8, \end{cases} \begin{cases} a=7, \\ b=7, \end{cases} \begin{cases} a=8, \\ b=8, \end{cases}$ 又因为 $\frac{3a+4b+7}{19}$ 为整数, 所以 $\begin{cases} a=6, \\ b=8, \end{cases}$ 此时 $m=10a+b=68, n=10a+8-b=60$, 所以 $A=68^2-60=4\ 564$.

9. 解: (1) 设该企业有 x 条甲类生产线. y 条乙类生产线. 根据题意, 得 $\begin{cases} x+y=30, \\ 3x+2y=70. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=10, \\ y=20. \end{cases}$
答: 该企业有 10 条甲类生产线, 20 条乙类生产线.
(2) 设购买更新 1 条乙类生产线的设备需投入 m 万元, 则购买更新 1 条甲类生产线的设备需投入 $(m+5)$ 万元. 根据题意, 得 $\frac{200}{m+5} =$

$\frac{180}{m}$, 解得 $m=45$. 经检验, $m=45$ 是所列方程的解, 且符合题意, 所以 $10(m+5)+20m-70=1\ 330$.

答: 还需投入 1 330 万元资金更新生产线的设备.

10. 解: (1) $y_1 = \frac{4}{3}x$ ($0 < x < 6$), $y_2 = \frac{6}{x}$ ($0 < x < 6$). 提示: 因为 $PQ \parallel BC$, 所以 $\triangle APQ \sim \triangle ABC$, 所以 $\frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC}, \frac{C_{\triangle ABC}}{C_{\triangle APQ}} = \frac{AB}{AP}$, 所以 $\frac{x}{6} = \frac{y_1}{8}, y_2 = \frac{6}{x}$. 因为 P 为 AB 上一点, 所以 $y_1 = \frac{4}{3}x$ ($0 < x < 6$), $y_2 = \frac{6}{x}$ ($0 < x < 6$).
(2) 图像如图所示. 当 $0 < x < 6$ 时, y_1 随 x 的增大而增大, y_2 随 x 的增大而减小.



- (3) $2.1 < x < 6$. 提示: 当 $y_1 = y_2$ 时, $\frac{4}{3}x = \frac{6}{x}$, 解得 $x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}, x_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (舍去). 当 $y_1 > y_2$ 时, 函数 y_1 的图像在 y_2 的上方, 此时 $\frac{3\sqrt{2}}{2} < x < 6$. 因为 $\sqrt{2} \approx 1.41$, 所以 $2.1 < x < 6$.
11. 解: (1) 对于 $y = ax^2 + bx + 4$ ($a \neq 0$), 令 $x=0$, 则 $y=4$, 所以点 $C(0,4)$, 所以 $OC=4$. 在 $\text{Rt}\triangle OBC$ 中, 由 $\tan \angle CBA = \frac{OC}{OB} = 4$, 得 $OB=1$, 所以点 $B(1,0)$. 将点 $(-1,6), (1,0)$ 分别代入 $y = ax^2 + bx + 4$ ($a \neq 0$), 得 $\begin{cases} a-b+4=6, \\ a+b+4=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-1, \\ b=-3. \end{cases}$ 所以抛物线的表达式为 $y = -x^2 - 3x + 4$.
(2) 对于 $y = -x^2 - 3x + 4$, 令 $y=0$, 即 $-x^2 - 3x + 4 = 0$, 解得 $x_1=1, x_2=-4$. 所以

点 $A(-4,0)$. 由(1)可知, 点 $B(1,0), C(0,4)$. 因为 F 为线段 BC 的中点, 所以点 $F(\frac{1}{2}, 2)$. 由待定系数法, 得直线 AC 的函数表达式为 $y=x+4$. 设点 $P(x, -x^2-3x+4)$, 则点 $D(x, x+4)$, 所以 $PD = -x^2-3x+4-x-4 = -x^2-4x = -(x+2)^2+4 (-4 < x < 0)$. 当 $x=-2$ 时, PD 长取得最大值, 此时点 $E(-2,0), D(-2,2), MN=2$. 将点 A 向右平移 2 个单位长度得到点 $A'(-2,0)$, 如图 1, 连接 $A'F$ 交 y 轴于点 N' , 过点 N' 作 $N'M' \perp PE$ 于点 M' , 连接 $AM', A'N'$. 易证四边形 $MNA'A$ 为平行四边形, 则 $AM = A'N$. 因为 $AM + MN + NF = A'N + 2 + NF \geq 2 + A'F$ (当点 N 与点 N' 重合时, 等号成立), 所以 $AM + MN + NF$ 的最小值为 $2 + A'F = 2 + \sqrt{(2+\frac{1}{2})^2 + 2^2} = 2 + \frac{\sqrt{41}}{2}$.

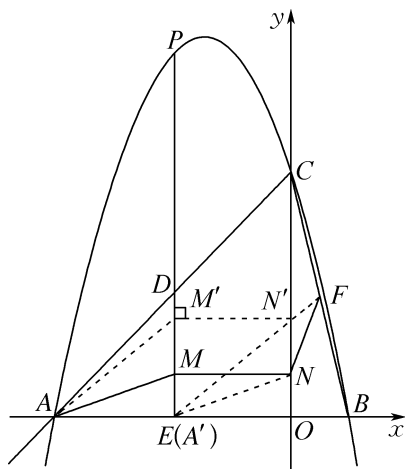


图 1

(3) 点 Q 的坐标为 $(-1, -2)$ 或 $(-\frac{19}{4}, \frac{43}{16})$.

提示: 易知直线 AC 与 x 轴所夹锐角为 45° , 所以设抛物线向左平移 m 个单位长度, 则抛物线同时向下平移了 m 个单位长度, 所以新抛物线的表达式为 $y = -(x+m)^2 - 3(x+m) + 4 - m$, 将点 $D(-2,2)$ 代入, 得 $2 = -(-2+m)^2 - 3(-2+m) + 4 - m$, 解得 $m = 2$ 或 $m = -2$ (舍去), 所以新抛物线的表达式为 $y = -(x+2)^2 - 3(x+2) + 2 = -x^2 - 7x - 8$. 由待定系数法, 得直线 BC 的表达式为 $y = -4x + 4$. 如图, 分情

况讨论: 当点 Q 在射线 CA 下方时, 因为 $\angle QDK = \angle ACB$, 所以 $DQ \parallel BC$, 易求直线 DQ 的函数表达式为 $y = -4(x+2) + 2$, 令 $y=0$, 则 $x = -\frac{3}{2}$, 所以点 $H(-\frac{3}{2}, 0)$, 所以 $AH = \frac{5}{2}$, 联立上式和新抛物线的表达式, 得 $-4(x+2) + 2 = -x^2 - 7x - 8$, 解得 $x_1 = -2$ (舍去), $x_2 = -1$, 所以点 $Q(-1, -2)$; 当点 $Q(Q')$ 在射线 CA 上方时, 则 $\angle Q'DK = \angle ACB = \angle QDK$, 所以直线 DQ' 与直线 DQ 关于射线 CA 对称, 作点 H 关于射线 CA 的对称点 H' , 易知点 H' 在直线 DQ' 上, 连接 AH' , 所以 $AH' = AH = \frac{5}{2}$, $\angle H'AH = 2\angle DAH = 90^\circ$, 所以点 $H'(-4, \frac{5}{2})$, 由待定系数法, 得直线 DH' 的函数表达式为 $y = -\frac{1}{4}(x+2) + 2$, 联立上式和新抛物线的表达式, 得 $-\frac{1}{4}(x+2) + 2 = -x^2 - 7x - 8$, 解得 $x_1 = -2$ (舍去), $x_2 = -\frac{19}{4}$, 所以点 $Q(-\frac{19}{4}, \frac{43}{16})$. 综上所述, 点 Q 的坐标为 $(-1, -2)$ 或 $(-\frac{19}{4}, \frac{43}{16})$.

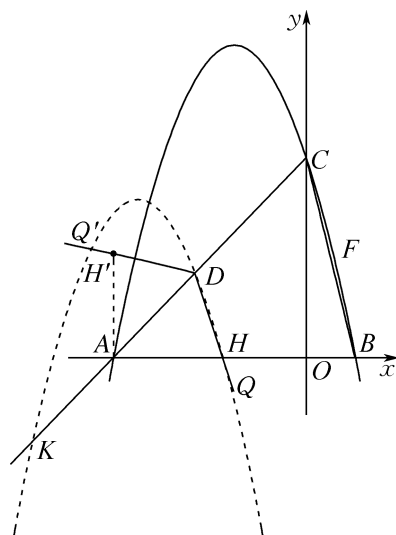


图 2

12. 解: (1) 因为 $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = 60^\circ$, $\angle BAD = \alpha$, 所以 $\angle CAD = 60^\circ - \alpha$. 由对顶角相等, 得 $\angle AFG = \angle EFD = \angle BAC = 60^\circ$. 由三角形的内角和, 得 $\angle AGE + \angle CAD + \angle AFG = 180^\circ$, 所以 $\angle AGE = 180^\circ - (\angle CAD + \angle AFG) = 60^\circ + \alpha$.

(2) $CG = \frac{2\sqrt{3}}{3} DE$. 证明如下:

如图 1, 设 DE 交 AB 于点 N , 连接 BE , 过点 B 作 $BM \parallel EG$, 分别交 AD, AC 于点 H, M . 因为 $AB = AC, \angle BAC = 60^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 所以 $AB = BC, \angle ABC = \angle C = 60^\circ$. 因为 $BM \parallel EG$, 所以 $\angle AHM = \angle EFD = \angle BAC = 60^\circ$. 由外角的性质, 得 $\angle AHM = \angle ABM + \angle BAD = 60^\circ$. 因为 $\angle ABC = \angle ABM + \angle CBM = 60^\circ$, 所以 $\angle BAD = \angle CBM$. 易证 $\triangle ABD \cong \triangle BCM$ (ASA), 所以 $BD = CM$. 因为点 D 关于直线 AB 的对称点为 E , 所以 $DE \perp AB, DN = EN, BE = BD, \angle ABE = \angle ABC = 60^\circ$, 所以 $\angle CBE = 120^\circ$. 所以 $\angle CBE + \angle C = 180^\circ$, 所以 $BE \parallel AC$. 所以四边形 $BEGM$ 是平行四边形, 所以 $BE = GM$. 所以 $GM = BE = BD = CM$, 所以 $CG = 2CM = 2BD$. 在 $\text{Rt}\triangle DNB$

中, 由 $\sin \angle ABC = \frac{DN}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $DN = \frac{\sqrt{3}}{2}BD$. 所以 $DE = 2DN = \sqrt{3}BD$, 所以 $\frac{CG}{DE} = \frac{2BD}{\sqrt{3}BD} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以 $CG = \frac{2\sqrt{3}}{3}DE$.

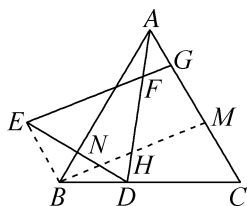


图 1

(3) $\frac{CG}{AG} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 或 $\frac{CG}{AG} = \frac{\sqrt{3}+5}{2}$. 提示: 连接 BE , 设 DE 交 AB 于点 N , 记 $\angle BAD = \alpha$. 因为 $AB = AC, \angle EFD = \angle BAC = 90^\circ$, 所以 $\angle ABC = 45^\circ$. 由轴对称的性质, 得 $\angle EAB = \angle BAD = \alpha, \angle EBA = \angle ABC = 45^\circ, DE \perp AB, NE = ND, AE = AD$. 分情况讨论: 如图 2, 当点 G 在边 AC 上时, 易知 $\angle EAG > 90^\circ$, 所以当 $\triangle AEG$ 为等腰三角形时, 只能是 $AE = AG$. 因为 $\angle AFG = \angle EFD = \angle BAC = 90^\circ$, 所以 $\angle FAG + \angle AGE = 90^\circ = \angle FAG + \angle BAD$, 所以 $\angle BAD = \angle AGE = \angle AEG = \alpha$. 因为 $AE = AG, EG \perp AD$, 所以 $\angle FAG = \angle EAD = 2\angle BAD = 2\alpha$, 所以 $\angle EAG = 2\angle FAG = 4\alpha$. 由三角形的内角和定理, 得

$\angle AEG + \angle EAG + \angle AGE = 180^\circ$, 即 $\alpha + 4\alpha + \alpha = 180^\circ$, 解得 $\alpha = 30^\circ$. 设 $AG = AE = AD = m$. 在 $\text{Rt}\triangle ADN$ 中, 由 $\sin \angle BAD = \frac{DN}{AD} = \frac{1}{2}$, 得 $DN = \frac{1}{2}m$. 由 $\cos \angle BAD = \frac{AN}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $AN = \frac{\sqrt{3}}{2}m$. 在 $\text{Rt}\triangle BDN$ 中, 由 $\tan \angle ABD = \frac{DN}{BN} = 1$, 得 $BN = \frac{1}{2}m$. 所以 $AC = AB = AN + BN = \frac{\sqrt{3}+1}{2}m$, 所以 $CG = AC - AG = \frac{\sqrt{3}-1}{2}m$. 所以 $\frac{CG}{AG} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 如图 3, 当点 G 在 CA 的延长线上时, 易知 $\angle AGE > 90^\circ$. 所以当 $\triangle AEG$ 为等腰三角形时, 只能是 $AG = EG$. 记 $\angle BAD = \beta$, 则 $\angle BAE = \angle BAD = \beta, \angle EAF = 180^\circ - \angle DAE = 180^\circ - 2\beta, \angle EAG = \angle BAG - \angle BAE = 90^\circ - \beta$. 因为 $AG = EG$, 所以 $\angle AEG = \angle EAG = 90^\circ - \beta$. 在 $\text{Rt}\triangle AFE$ 中, $\angle AEG + \angle EAF = 90^\circ$, 即 $90^\circ - \beta + 180^\circ - 2\beta = 90^\circ$, 解得 $\beta = 60^\circ$, 所以 $\angle AEG = \angle EAG = 30^\circ$. 设 $AG = EG = n$, 易求 $AE = \sqrt{3}n$, 所以 $AD = AE = \sqrt{3}n$.

同上可求 $AN = AD \cdot \cos \angle BAD = \frac{\sqrt{3}}{2}n, BN = DN = AD \cdot \sin \angle BAD = \frac{3}{2}n$, 所以 $AC = AB = AN + BN = \frac{\sqrt{3}+3}{2}n$, 所以 $CG = AG + AC = \frac{\sqrt{3}+5}{2}n$, 所以 $\frac{CG}{AG} = \frac{\sqrt{3}+5}{2}$. 综上所述, $\frac{CG}{AG} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 或 $\frac{CG}{AG} = \frac{\sqrt{3}+5}{2}$.

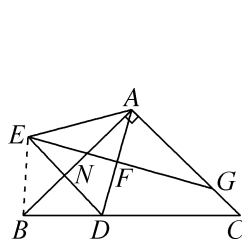


图 2

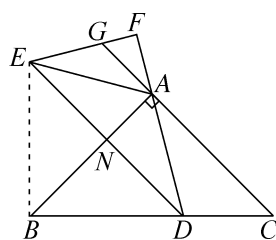


图 3

C23 广州市 2024 年中考真题精编

- A
- C 提示: 连接 AD . 因为 $\angle BAC = 90^\circ, AB = AC = 6$, D 为边 BC 的中点, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = 18$, $AD = BD = CD, \angle BAD = \angle C = 45^\circ$. 易证 $\triangle ADE \cong \triangle CDF$ (SAS), 所以 $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle CDF}$, 所以 $S_{\text{四边形}AEDF} = S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = 9$.

3. D 提示:由题图可知,反比例函数 y_2 在每一个象限内都随着 x 的增大而减小. 当 $x > 1$ 时,二次函数 y_1 随着 x 的增大而减小.

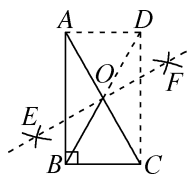
4. C 提示:设 AB 交 OC 于点 D . 因为 $AB=4\sqrt{3}$, $OC \perp AB$, 所以 $AD=BD=\frac{1}{2}AB=2\sqrt{3}$. 因为 $\angle ABC=30^\circ$, 所以 $\angle AOD=60^\circ$. 在 $\text{Rt} \triangle AOD$ 中, 由 $\sin \angle AOD = \frac{AD}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $OA=4$. 因为 $OP=5 > OA$, 所以点 P 在 $\odot O$ 外.

5. 220 6. 5

7. $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{7}{4}$ 提示:当 $x \leq 0$ 时, $x \otimes 1 = x^2 - 1 = -\frac{3}{4}$, 解得 $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ (舍去); 当 $x > 0$ 时, $x \otimes 1 = -x + 1 = -\frac{3}{4}$, 解得 $x = \frac{7}{4}$.

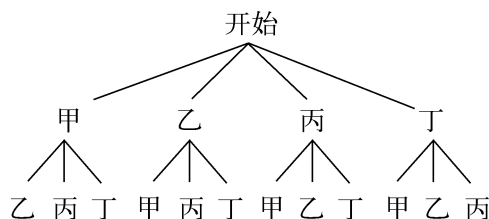
8. ①②④ 提示:因为点 $A(1,0)$, $C(0,2)$, 所以点 $B(1,2)$, 所以 $k=2$, 故①正确; 连接 OB, OD , 设 OD 交 AB 于点 M , 因为点 B, D 在函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像上, 所以 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle A'OD} = \frac{k}{2}$, 所以 $S_{\triangle AOB} - S_{\triangle AOM} = S_{\triangle A'OD} - S_{\triangle AOM}$, 即 $S_{\triangle OBM} = S_{\text{梯形} AMDA'}$, 所以 $S_{\triangle OBD} = S_{\text{梯形} ABDA'}$, 故②正确; 易证四边形 $OA'DE$ 为矩形, 所以 $A'E = OD$, 设点 $D(x, \frac{2}{x}) (x > 0)$, 因为 $(x - \frac{2}{x})^2 \geq 0$, 所以 $x^2 + (\frac{2}{x})^2 \geq 2x \cdot \frac{2}{x}$, 所以 $A'E = OD = \sqrt{x^2 + (\frac{2}{x})^2} \geq \sqrt{2x \cdot \frac{2}{x}} = 2$ (当 $x = \frac{2}{x}$ 时, 等号成立), 即当 $x = \sqrt{2}$ 时, $A'E$ 的最小值是 2, 故③错误; 设点 $D(x, \frac{2}{x}) (x > 0)$, 在 $\text{Rt} \triangle B'DD$ 中, $\tan \angle B'DD = \frac{B'D}{B'B} = \frac{2 - \frac{2}{x}}{x - 1} = \frac{2}{x}$, 在 $\text{Rt} \triangle OB'C$ 中, $\tan \angle BB'O = \frac{OC}{B'C} = \frac{2}{x}$, 所以 $\angle B'DD = \angle BB'O$, 故④正确.

9. (1) 解:如图, 线段 BO 即为所求.



(2) 证明:因为在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, BO 为中线, 所以 $BO = AO = CO$. 因为中线 BO 绕点 O 逆时针旋转 180° 得到 DO , 所以 $DO = BO = AO = CO$, 所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $AC = BD$. 所以四边形 $ABCD$ 是矩形.

10. 解:(1) 由表格可知, A 组同学得分的众数为 82 分, 中位数为 $(84 + 86) \div 2 = 85$ (分).
(2) 将 A 组的两名同学分别记为甲、乙, B 组的两名同学分别记为丙、丁, 画树状图如下:



由图可知, 共有 12 种等可能的结果, 其中这 2 名同学恰好来自同一组的结果有 4 种, 所以所求概率为 $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

11. 解:(1) 由题, 得 $\angle BDC = 36.87^\circ$. 在 $\text{Rt} \triangle BCD$ 中, $CD = BD \cdot \cos \angle BDC \approx 10 \times 0.80 = 8$ (m).

答: CD 的长约为 8 m.

(2) 在 $\text{Rt} \triangle BCD$ 中, $BC = BD \cdot \sin \angle BDC \approx 10 \times 0.60 = 6$ (m). 在 $\text{Rt} \triangle ACD$ 中, 由勾股定理, 得 $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (m). 所以 $AB = AC - BC = 9$ (m), 所以模拟装置从点 A 下降到点 B 的时间为 $9 \div 2 = 4.5$ (s).

答: 模拟装置从点 A 下降到点 B 所需的时间约为 4.5 s.

12. 解:(1) $AF = AD$, $AF \perp AD$. 理由如下:

因为四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $AB = AD$, $\angle BAD = \angle C = 120^\circ$. 因为 $\triangle ABE$ 和 $\triangle AFE$ 关于 AE 成轴对称, 所以 $AB = AF$, 所以 $AF = AD$. 因为 $\angle BAF = 30^\circ$, 所以 $\angle DAF = \angle BAD - \angle BAF = 90^\circ$, 即 $AF \perp AD$.

(2) ①如图 1, 连接 OA, OE , 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H , 过点 O 作 $OG \perp AE$ 于点 G ,

则 $AG=EG=\frac{1}{2}AE$. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle C=120^\circ$, 所以 $AB\parallel CD$, 所以 $\angle B=180^\circ-\angle C=60^\circ$. 由轴对称的性质, 得 $\angle AFE=\angle B=60^\circ$. 由圆周角定理, 得 $\angle AOE=2\angle AFE=120^\circ$. 因为 $OA=OE$, 所以 $\angle OAE=\angle OEA=30^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle AOG$ 中, 由 $OA=\frac{AG}{\cos \angle OAE}=\frac{2\sqrt{3}}{3}AG=\frac{\sqrt{3}}{3}AE$. 在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, $AH=AB\cdot \sin B=9+3\sqrt{3}$. 因为 $AE\geq AH$, 且点 E 不与点 B, C 重合, 所以 $AE\geq 9+3\sqrt{3}$, 且 $AE\neq 6+6\sqrt{3}$. 因为 $r=OA=\frac{\sqrt{3}}{3}AE$, 所以 $r\geq 3\sqrt{3}+3$, 且 $r\neq 2\sqrt{3}+6$.

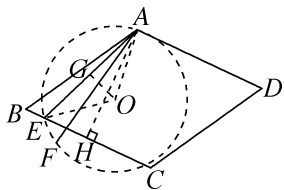


图 1

②能相切, 此时 $BE=12$. 理由如下:

假设存在, 如图 2, 画出示意图. 设 $\triangle AEF$ 的外接圆圆心为 O , 延长 FO 交 $\odot O$ 于点 G , 连接 AG, AC, OA, OF , 过点 E 作 $EH\perp AB$ 于点 H . 因为 $\angle AFE=\angle B=180^\circ-\angle BCD=60^\circ$, $\angle ACE=\frac{1}{2}\angle BCD=60^\circ$, 所以 $\angle AFE=\angle ACE=60^\circ$. 因为当点 C 在 $\odot O$ 内或 $\odot O$ 外时, $\angle ACE\neq 60^\circ$, 所以点 C 在 $\odot O$ 上. 设 $\angle AFD=\alpha$. 因为 $OF\perp FD$, FG 为 $\odot O$ 的直径, 所以 $\angle GAF=\angle GFD=90^\circ$, 所以 $\angle AGF+\angle AFG=\angle AFD+\angle AFG$, 所以 $\angle AEB=\angle AEF=\angle AGF=\angle AFD=\alpha$. 所以 $\angle CEF=180^\circ-\angle AEB-\angle AEF=180^\circ-2\alpha$. 因为 $AF=AD$, 所以 $\angle ADF=\angle AFD=\alpha$, 所以 $\angle DAF=180^\circ-2\alpha$. 因为 $\angle CEF=\angle CAF$, 所以 $\angle CAF=180^\circ-2\alpha=\angle DAF$. 因为 $\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAD=60^\circ$, 所以 $\angle CAF=180^\circ-2\alpha=\angle DAF=30^\circ$, 所以 $\alpha=$

75° , 即 $\angle AEB=75^\circ$. 因为 $\angle B=60^\circ$, 所以 $\angle BEH=30^\circ$, 所以 $\angle AEH=\angle EAH=45^\circ$. 设 $BH=m$, 则 $EH=AH=\sqrt{3}m$, $BE=2m$. 因为 $AB=6+6\sqrt{3}$, 所以 $m+\sqrt{3}m=6+6\sqrt{3}$, 所以 $m=6$, 所以 $BE=12$.

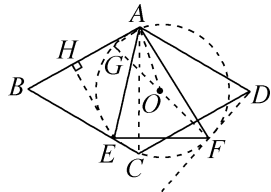


图 2

13. 解: (1) 抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{6a}{2a}=3$.

(2) 由题可知, 点 A, B 的纵坐标相等, 所以点 A, B 关于抛物线的对称轴对称. 所以 $x_A+x_B=6$. 因为点 $C(3, 1)$, 所以点 C 在抛物线的对称轴上, 所以 $AC=BC$. 因为 $C_1=C_2+2$, 即 $AC+CD+AD=BC+CD+BD+2$, 所以 $AD=BD+2$, 即 $AD>BD$. 由题意可知, $m^2>0$, 所以点 A 在点 B 的左侧. 设点 $D(x_D, 2)$, 则 $x_D-x_A=x_B-x_D+2$, 即 $2x_D=x_A+x_B+2=8$, 所以 $x_D=4$, 所以点 $D(4, 2)$. 将点 $C(3, 1), D(4, 2)$ 分别代入

$$y=m^2x+n, \text{ 得 } \begin{cases} 3m^2+n=1, \\ 4m^2+n=2, \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} m^2=1, \\ n=-2. \end{cases} \text{ 所以 } m=\pm 1.$$

(3) ①由(2)可知, 直线 l 的函数表达式为 $y=x-2$. 易知该直线和直线 AB 所夹角为 45° . 当直线 l 旋转后的直线 $l'\parallel AB$ 时, 旋转时间 $t=45\div 3=15(\text{s})$;

②由题可知, $l': y=1, y_E=y_F=1$. 令 $ax^2-6ax-a^3+2a^2+1=1$, 即 $x^2-6x-a^2+2a=0$, 则 $x_E+x_F=6, x_Ex_F=-a^2+2a$. 所以 $EF^2=(x_E-x_F)^2=(x_E+x_F)^2-4x_Ex_F=4(a^2-2a+9)$, 所以 $S=\frac{1}{2}\cdot EF\cdot$

$$(y_A-y_E)=\frac{1}{2}EF=\sqrt{a^2-2a+9}=$$

$\sqrt{(a-1)^2+8} \geq 2\sqrt{2}$. 当 $a=1$ 时, 等号成立, 即 k 的最大值为 $2\sqrt{2}$, 此时抛物线 G 的表达式为 $y=x^2-6x+2$.

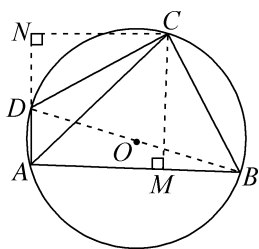
C24 武汉市 2024 年中考真题精编

1. D

2. D 提示: 因为向圆柱体水槽匀速注水, 所以在相同时间内, 注水量相同的情况下, 水面面积越小, 水深变化越大, 即图像越陡. 由题图可知, 水槽内下层实心圆柱体的底面半径大, 导致水面面积变小, 所以水面上升快, 上层实心圆柱体底面半径稍小, 水面面积略微变大, 水面上升稍慢, 再往上则水面上升更慢, 所以对应图像是第一段比较陡, 第二段比第一段缓, 第三段比第二段缓.

3. C 提示: 由作图可知, $AB=AD=BC=DC$, 所以四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $BC \parallel AD$, 所以 $\angle ABC = 180^\circ - \angle A = 136^\circ$, $\angle CBD = \angle ADB = \angle ABD$, 所以 $\angle CBD = \angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABC = 68^\circ$.

4. A 提示: 解法 1 如图, 过点 C 分别作 $CM \perp AB$ 于点 M , $CN \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 N , 连接 BD . 因为 $\angle BAC = \angle CAD = 45^\circ$, 所以 $\widehat{BC} = \widehat{CD}$, $\angle BAD = 90^\circ$, 所以 $CB = CD$, 且 BD 为直径, 所以 $\angle BCD = 90^\circ$, 且 $\triangle BCD$ 为等腰直角三角形. 因为 AC 平分 $\angle BAN$, $CM \perp AB$, $CN \perp AD$, 所以 $CM = CN$. 易证 $\text{Rt}\triangle CBM \cong \text{Rt}\triangle CDN$ (HL), 所以 $BM = DN$. 易证四边形 $AMCN$ 是正方形, 所以 $AM = AN = CM$. 所以 $AB + AD = AM + BM + AD = AM + DN + AD = AM + AN = 2AM = 2$, 所以 $AM = CM = 1$. 在 $\text{Rt}\triangle BCM$ 中, 由 $\sin \angle ABC = \frac{CM}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $BC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $BD = \sqrt{2}BC = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. 所以 $\odot O$ 的半径是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

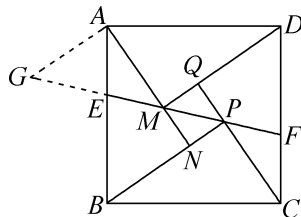


解法 2 如图, 过点 C 作 $CN \perp AD$ 交 AD 的延长线于

点 N , 连接 BD . 设 $DN = x$. 由圆内接四边形的性质, 得 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$. 又因为 $\angle CDN + \angle ADC = 180^\circ$, 所以 $\angle CDN = \angle ABC = 60^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle CDN$ 中, 由 $\tan \angle CDN = \frac{CN}{DN} = \sqrt{3}$, 得 $CN = \sqrt{3}x$, 所以 $CD = 2x$. 同解法 1 可证 BD 为直径, $\triangle BCD$ 为等腰直角三角形, 所以 $BD = 2\sqrt{2}x$. 在 $\text{Rt}\triangle ACN$ 中, $\angle CAN = 45^\circ$, 所以 $AN = CN = \sqrt{3}x$. 所以 $AD = AN - DN = (\sqrt{3} - 1)x$. 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 由勾股定理, 得 $AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{8x^2 - (\sqrt{3} - 1)^2 x^2} = \sqrt{(4 + 2\sqrt{3})x^2} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 x^2} = (\sqrt{3} + 1)x$. 因为 $AB + AD = 2$, 所以 $(\sqrt{3} + 1)x + (\sqrt{3} - 1)x = 2$, 解得 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 所以 $BD = 2\sqrt{2}x = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. 所以 $\odot O$ 的半径是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

5. D 提示: 对于 $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, 令 $x = 0$, 则 $y = -1$, 由题可知, 点 A_{10} 的坐标为 $(1, 0)$, 即 $y_{10} = 0$. 因为该函数图像关于点 $(1, 0)$ 成中心对称, 所以 $y_9 + y_{11} = y_8 + y_{12} = \dots = y_1 + y_{19} = 0$, 且点 $(0, -1)$ 和点 $A_{20}(2, y_{20})$ 关于点 $(1, 0)$ 成中心对称, 所以 $y_{20} = 1$. 也可将点 $A_{20}(2, y_{20})$ 代入函数表达式, 得 $y_{20} = 2^3 - 3 \times 2^2 + 3 \times 2 - 1 = 1$, 所以 $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{19} + y_{20}$ 的值为 1.

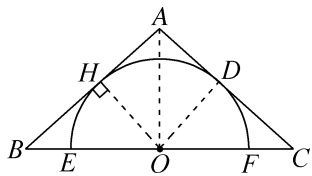
6. $\frac{k^2+1}{(k-1)^2}$ 提示: 如图, 过点 A 作 $AG \parallel BP$ 交 FE 的延长线于点 G . 所以 $\triangle AGE \sim \triangle BPE$, 所以 $\frac{AG}{BP} = \frac{AE}{BE} = \frac{1}{k}$. 设 $AG = 1$, 则 $BP = k$. 由题可知, $\angle NMP = \angle NPM = 45^\circ$, $AN = DM = BP = k$. 因为 $AG \parallel BP$, 所以 $\angle G = \angle NPM = \angle NMP = \angle AMG = 45^\circ$, 所以 $AM = AG = 1$, 所以 $MN = AN - AM = k - 1$, 所以 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AD^2}{MN^2} = \frac{MD^2 + AM^2}{MN^2} = \frac{k^2 + 1}{(k-1)^2}$.



7. ②③④ 提示: 由题可知, 该抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-1+m}{2}$, 因为 $0 < m < 1$, 所以 $-\frac{1}{2} < \frac{-1+m}{2} < 0$, 所以 $-\frac{b}{2a} < 0$, 因为 $a < 0$, 所以 $b < 0$, 故

①错误;因为 $a < 0$, 所以抛物线开口向下, 画出函数图像草图, 观察可知, 当 $-1 < x < m$ 时, $y > 1$, 若 $0 < x < 1$, 则 $-1 < x-1 < 0$, 又因为 $0 < m < 1$, 所以 $a(x-1)^2 + b(x-1) + c > 1$, 故②正确; 由①可知, $-\frac{1}{2} < -\frac{b}{2a} < 0$, 若 $a = -1$, 则 $-\frac{1}{2} < \frac{b}{2} < 0$, 即 $-1 < b < 0$, 当 $a = -1$ 时, 抛物线的表达式为 $y = -x^2 + bx + c$, 令 $x = -1, y = 1$, 则 $-1 - b + c = 1$, 即 $c = b + 2$, 此时抛物线的顶点纵坐标 (该二次函数的最大值) 为 $t = \frac{-4c - b^2}{-4} = \frac{b^2 + 4c}{4} = \frac{1}{4}b^2 + c = \frac{1}{4}b^2 + b + 2 = \frac{1}{4}(b + 2)^2 + 1$, 易知当 $-1 < b < 0$ 时, $\frac{5}{4} < t < 2$, 即当 $a = -1$ 时, $ax^2 + bx + c < 2$, 所以关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 2$ 无解, 故③正确; 若 $x_1 + x_2 > -\frac{1}{2}$, 则 $\frac{x_1 + x_2}{2} > -\frac{1}{4}$, 因为 $x_1 > x_2$, 总有 $y_1 < y_2$, 所以点 $A(x_1, y_1)$ 离 $x = \frac{-1+m}{2}$ 较远, 所以对称轴 $-\frac{1}{2} < \frac{-1+m}{2} \leq -\frac{1}{4}$, 解得 $0 < m \leq \frac{1}{2}$, 故④正确.

8. (1) 证明: 如图, 连接 OD, OA , 过点 O 作 $OH \perp AB$ 于点 H . 因为 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, O 是底边 BC 的中点, 所以 $AO \perp BC$, AO 平分 $\angle BAC$. 因为 AC 与半圆 O 相切于点 D , 所以 $OD \perp AC$. 又因为 $OH \perp AB$, 所以 $OH = OD$, 所以 OH 为半圆 O 的半径, 所以 AB 与半圆 O 相切.



(2) 解: 由(1)可知, $OD \perp AC$, 在 $\text{Rt}\triangle OCD$ 中, $CD = 4, CF = 2, OD = OF$, 所以 $OC = OF + CF = OD + 2$, 由勾股定理, 得 $OD^2 + CD^2 = OC^2$, 即 $OD^2 + 4^2 = (OD + 2)^2$, 所以 $OD = 3$, 所以 $OC = 5$, 所以 $\cos C = \frac{CD}{OC} = \frac{4}{5}$.

在 $\text{Rt}\triangle OCA$ 中, $\cos C = \frac{OC}{AC} = \frac{4}{5}$, 所以

$$\sin \angle OAC = \frac{OC}{AC} = \frac{4}{5}.$$

9. 解: (1) ① $a = -\frac{1}{15}, b = \frac{81}{10}$.

② 由①, 得 $y = -\frac{1}{15}x^2 + x = -\frac{1}{15}(x^2 - 15x + \frac{225}{4}) + \frac{15}{4} = -\frac{1}{15}(x - \frac{15}{2})^2 + \frac{15}{4}$ ($0 \leq x \leq 9$), 所以火箭运行的最高点是 $\frac{15}{4}$ km. 所以 $\frac{15}{4} - 1.35 = 2.4$ (km). 所以 $2.4 = -\frac{1}{15}x^2 + x$. 整理, 得 $x^2 - 15x + 36 = 0$. 解得 $x_1 = 12 > 9$ (舍去), $x_2 = 3$. 由①, 得 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{81}{10}$, 所以 $2.4 = -\frac{1}{2}x + \frac{81}{10}$, 解得 $x = 11.4$. 所以 $11.4 - 3 = 8.4$ (km).

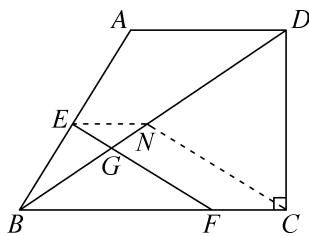
答: 这两个位置之间的距离为 8.4 km.

(2) $-\frac{2}{27} < a < 0$. 提示: 对于 $y = ax^2 + x$, 令 $x = 9$, 则 $y = 81a + 9$. 所以火箭第二级引发点的坐标为 $(9, 81a + 9)$. 对于 $y = -\frac{1}{2}x + b$, 令 $x = 9, y = -\frac{9}{2} + b$, 则 $81a + 9 = -\frac{9}{2} + b$, 所以 $a = \frac{2b - 27}{162}$; 令 $y = -\frac{1}{2}x + b = 0$, 则 $x = 2b > 15$, 即 $b > \frac{15}{2}$, 所以 $a = \frac{2b - 27}{162} > -\frac{2}{27}$, 所以当 $-\frac{2}{27} < a < 0$ 时, 火箭落地点与发射点的水平距离超过 15 km.

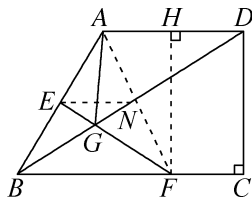
10. (1) 证明: 因为 E, F 分别是 AB, BC 的中点, 所以 $\frac{BE}{AB} = \frac{1}{2}, \frac{BF}{BC} = \frac{1}{2}$. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $\angle C = \angle EBF = 90^\circ, AB = CD$, 所以 $\frac{BE}{CD} = \frac{BF}{CB} = \frac{1}{2}$, 所以 $\triangle BCD \sim \triangle FBE$.

(2) 证法 1 如图 1, 延长 FE 交 DA 的延长线于点 M , 过点 F 作 $FH \perp AD$ 于点 H . 因为 $AD \parallel BC, \angle BCD = 90^\circ$, 则 $\angle FHD = \angle ADC = \angle BCD = 90^\circ$, 所以四边形 $CDHF$ 是矩形, 所以 $DH = CF, CD = FH$. 因为 $AD = 2CF$, 所以 $AH = DH = CF$. 因为 E 是 AB 的中点, 所以 $AE = BE$. 因为 $AM \parallel BC$, 所以 $\angle AME = \angle BFE, \angle MAE = \angle FBE$,

证法 2 如图 2, 取 BD 的中点 N , 连接 EN , CN . 因为 E 是 AB 的中点, N 是 BD 的中点, 所以 $EN = \frac{1}{2}AD$, $EN \parallel AD$. 因为 $AD = 2CF$, 所以 $EN = CF$. 因为 $AD \parallel BC$, 所以 $EN \parallel CF$, 所以四边形 $ENCF$ 是平行四边形, 所以 $EF \parallel CN$, 所以 $\angle NCB = \angle GFB$. 因为 $\angle BCD = 90^\circ$, N 是 BD 的中点, 所以 $CN = \frac{1}{2}BD = BN$, 所以 $\angle NCB = \angle NBC$, 所以 $\angle GFB = \angle NBC$, 所以 $BG = FG$.



(3) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 提示:如图 3,过点 F 作 $FH \perp AD$ 于点 H ,取 BD 的中点 N ,连接 AF, EN ,由(2),得 $AH = DH = CF$, $EN = \frac{1}{2} AD$, $EN \parallel AD$,设 $CF = a$,则 $AH = DH = EN = CF = a$, $AD = CD = FH = 2a$. 在 $\text{Rt}\triangle AHF$ 中,由勾股定理,得 $AF = \sqrt{AH^2 + FH^2} = \sqrt{5}a$. 因为 $AG = FG$, $BG = FG$,所以 $AG = BG$. 因为 E 是 AB 的中点,所以 EF 垂直平分 AB ,所以 $BF = AF = \sqrt{5}a$. 因为 $EN \parallel AD \parallel BC$,所以 $\triangle EGN \sim \triangle FGB$,所以 $\frac{EG}{GF} = \frac{EN}{FB} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.



11. 解: (1) $A(1,0), B(-5,0), C(0, -\frac{5}{2})$.

(2) 由待定系数法, 得直线 AC 的函数表达式为 $y = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$. 因为 $PQ \parallel AC$, 所以可设

直线 PQ 的函数表达式为 $y = \frac{5}{2}x + b$, 设点

$$P\left(t, \frac{1}{2}t^2 + 2t - \frac{5}{2}\right) (-5 < t < 0), \text{ 由 } \frac{1}{2}t^2 +$$

$2t - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}t + b$, 得 $b = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}$, 所以

直线 PQ 的函数表达式为 $y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}t^2 -$

$\frac{1}{2}t - \frac{5}{2}$, 令 $x=0$, 则 $y = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}$, 所以

点 $Q\left(0, \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}\right)$. 由待定系数法, 得直

线 BC 的函数表达式为 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$. 因为

BC 平分线段 PQ , 所以 PQ 的中点

$(2^t, 2^{t+1} - 4^t - 2)$ 在直线 BC 上, 所以 $2^{t+1} - 4^t - 2$

4⁴ 2² 4 2, 解得 $t_1 = 2, t_2 = 0$ (占

(3) 如图, 过点 C 作 $TS \parallel x$ 轴, 过点 E , E' 分

别作 TS 的垂线,垂足分别为 T, S , 则 $\angle T =$

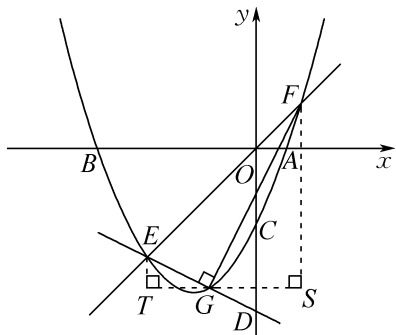
$\angle FGS = \angle GFS$, 所以 $\triangle ETG \sim \triangle GSF$, 所

以 $\frac{ET}{GS} = \frac{TG}{SF}$, 即 $ET \cdot FS = GS \cdot TG$. 因为

点 D 与原点 O 关于点 $C(0, -\frac{9}{2})$ 对称, 所以

点 $D(0, -6)$. 设直线 DE 的函数表达式为 $y_1 = k_1x$, 直线 DE 的函数表达式为 $y_2 =$

$k_2x - 5$, 联立 $\begin{cases} y_1 = k_1x, \\ y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{2}, \end{cases}$ 得 $k_1x = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{2}$, 即 $\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{2} = 0$, 联立 $\begin{cases} y_2 = k_2x - 5, \\ y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{2}, \end{cases}$ 得 $k_2x - 5 = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{2}$, 即 $\frac{1}{2}x^2 + (2 - k_2)x + \frac{5}{2} = 0$, 设 $x_E = e, x_F = f, x_G = g$, 因为点 E, F 为直线 EF 与抛物线的两个交点, 所以 e, f 为方程 $\frac{1}{2}x^2 + (2 - k_1)x - \frac{5}{2} = 0$ 的两根, $ef = -5$, 同理可得 $eg = 5, e + g = 2k_2 - 4$, 所以 $f = -g$, $ET = y_E - y_G = \frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2}g^2 + 2g - \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^2 - g^2) + 2(e - g) = \frac{1}{2}(e + g + 4)(e - g), FS = y_F - y_G = \frac{1}{2}f^2 + 2f - \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2}g^2 + 2g - \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}(f^2 - g^2) + 2(f - g) = \frac{1}{2}(f + g + 4)(f - g)$. 因为 $ET \cdot FS = GS \cdot TG$, 所以 $\frac{1}{2}(e + g + 4)(e - g) \cdot \frac{1}{2}(f + g + 4)(f - g) = (f - g)(g - e)$, 所以 $\frac{1}{2}(e + g + 4)(e - g) \cdot \frac{1}{2}(-g + g + 4)(-g - g) = (g - e)(-g - g)$, 化简, 得 $e + g = -5$, 所以 $2k_2 - 4 = -5$, 解得 $k_2 = -\frac{1}{2}$, 所以直线 DE 的函数表达式为 $y = -\frac{1}{2}x - 5$.

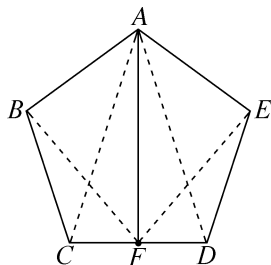


1. A

2. B 提示: 过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H . 因为 $AC = BC = 2, \angle ACB = 90^\circ, CH \perp AB$, 所以 $AB = 2\sqrt{2}, AH = BH = CH = \sqrt{2}$. 因为 $CD = AB = 2\sqrt{2}$, 所以在 $\text{Rt}\triangle CHD$ 中, $DH = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{6}$, 所以 $DB = DH - BH = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

3. C 提示: 因为 $a - b + 1 = 0$, 所以 $b = a + 1$. 因为 $0 < a + b + 1 < 1$, 所以 $0 < a + a + 1 + 1 < 1$, 即 $0 < 2a + 2 < 1$, 解得 $-1 < a < -\frac{1}{2}$, 故选项 A 错误. 因为 $-1 < a < -\frac{1}{2}$, 所以 $0 < a + 1 < \frac{1}{2}$, 即 $0 < b < \frac{1}{2}$, 故选项 B 错误. 由 $-1 < a < -\frac{1}{2}$, 得 $-2 < 2a < -1, -4 < 4a < -2$. 由 $0 < b < \frac{1}{2}$, 得 $0 < 4b < 2, 0 < 2b < 1$. 所以 $-2 < 2a + 4b < 1, -4 < 4a + 2b < -1$, 故选项 C 正确, 选项 D 错误.

4. D 提示: 如图, 连接 AC, AD . 因为 $AB = AE, BC = ED$, 若 $\angle ABC = \angle AED$, 则 $\triangle ABC \cong \triangle AED$ (SAS), 所以 $AC = AD$. 因为 F 是 CD 的中点, 所以 $AF \perp CD$, 故选项 A 不符合题意; 连接 BF, EF . 因为 $AB = AE, AF = AF$, 若 $\angle BAF = \angle EAF$, 则 $\triangle ABF \cong \triangle AEF$ (SAS), 所以 $\angle AFB = \angle AFE, BF = EF$, 所以 $\triangle BFC \cong \triangle EFD$ (SSS), 所以 $\angle BFC = \angle EFD$, 所以 $\angle BFC + \angle AFB = \angle EFD + \angle AFE$, 即 $\angle AFC = \angle AFD = 90^\circ$, 所以 $AF \perp CD$, 故选项 B 不符合题意; 选项 C 的思路与选项 B 大致相同, 先证 $\triangle BFC \cong \triangle EFD$ (SAS), 再证 $\triangle ABF \cong \triangle AEF$ (SSS), 即可证 $AF \perp CD$, 故选项 C 符合题意; 选项 D 的条件无法证出 $AF \perp CD$, 故选项 D 符合题意.



5. A 提示: 过点 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H . 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理, 得 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{5}$. 由等积法, 得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}AC \cdot BD$, 所以 $BD =$

$\frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, 所以在 $\text{Rt} \triangle CDB$ 中, $CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $AD = AC - CD = \frac{8\sqrt{5}}{5}$, 同理可得 $DH = \frac{AD \cdot BD}{AB} = \frac{8}{5}$, 所以 $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AE \cdot DH = \frac{4}{5}x$, $S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} BE \cdot DH = \frac{1}{2}(4-x) \times \frac{8}{5} = \frac{16}{5} - \frac{4}{5}x$. 因为 $\angle BDE = 90^\circ - \angle BDF = \angle CDF$, $\angle DBE = 90^\circ - \angle CBD = \angle C$, 所以 $\triangle BDE \sim \triangle CDF$, 所以 $\frac{S_{\triangle CDF}}{S_{\triangle BDE}} = \left(\frac{CD}{BD}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 所以 $S_{\triangle CDF} = \frac{1}{4} S_{\triangle BDE} = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x$, 所以 $y = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle CDF} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{4}{5}x - \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}x\right) = -\frac{3}{5}x + \frac{16}{5} (0 < x < 4)$. 因为 $-\frac{3}{5} < 0$, 所以 y 随 x 的增大而减小, 且 y 与 x 的函数图像为线段(不含端点), 故选项 A 符合题意.

6. $>$ 提示: 因为 $(\sqrt{10})^2 = 10$, $\left(\frac{22}{7}\right)^2 = \frac{484}{49}$. 因为 $10 = \frac{490}{49} > \frac{484}{49}$, 所以 $\sqrt{10} > \frac{22}{7}$.

7. (1) $90^\circ - \alpha$ 提示: 因为 $\angle BEF = \alpha$, $MN \perp EF$, 所以 $\angle EMN = 90^\circ - \alpha$. 因为 $CD \parallel AB$, 所以 $\angle CNM = \angle EMN = 90^\circ - \alpha$. 由折叠的性质, 得 $\angle C'NM = \angle CNM = 90^\circ - \alpha$.

(2) $3\sqrt{5}$ 提示: 设 PH 与 NC' 交于点 G' . 因为四边形 $ABCD$ 和四边形 $EFGH$ 是正方形, 所以 $\angle A = \angle D = \angle GHE = 90^\circ$, $HG = EH$, 所以 $\angle AHE + \angle GHD = \angle AHE + \angle AEH = 90^\circ$, 所以 $\angle GHD = \angle HEA$, 所以 $\triangle EAH \cong \triangle HDG$ (AAS). 同理可证 $\triangle EAH \cong \triangle HDG \cong \triangle GCF \cong \triangle FBE$, 所以 $DH = CG = AE = 4$, $DG = BE = 8$. 在 $\text{Rt} \triangle GDH$ 中, 由勾股定理, 得 $GH = \sqrt{DG^2 + DH^2} = 4\sqrt{5}$. 因为 $\angle C'NM = \angle CNM$, $MN \perp GH$, 所以易证 $\triangle PNG \cong \triangle P'NG'$, 所以 $PG = PG' = \frac{1}{2} GG'$, 且 $NG = NG'$. 因为四边形 $CBMN$ 沿 MN 折叠, 所以 $CN = C'N$, 所以 $CN - NG = C'N - NG'$, 即 $C'G' = CG = 4$. 因为 $\triangle GDH$ 沿 GH 折叠得到 $\triangle GD'H$, 所以 $GD' = GD = 8$. 因为 $\angle HC'G' = \angle HD'G = 90^\circ$, 所以 $C'G' \parallel D'G$, 所以 $\frac{HG'}{HG} = \frac{C'G'}{D'G} = \frac{1}{2}$, 所以 $HG' = GG' = \frac{1}{2} GH = 2\sqrt{5}$. 又因为 $PG' = \frac{1}{2} GG' = \sqrt{5}$, 所以 $PH = PG' + HG' = 3\sqrt{5}$.

8. 解: (1) (i) 7 5 (ii) $(n+1)^2 - (n-1)^2$
(2) $4(k^2 - m^2 + k - m)$

9. (1) 证明: 因为 $FA = FE$, 所以 $\angle FAE = \angle AEF$. 由同弧所对的圆周角相等, 得 $\angle FAE = \angle BCE$. 又因为 $\angle AEF = \angle CEB$, 所以 $\angle CEB = \angle BCE$. 因为 CE 平分 $\angle ACD$, 所以 $\angle ACE = \angle DCE$. 因为 AB 是直径, 所以 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以 $\angle CEB + \angle DCE = \angle BCE + \angle ACE = \angle ACB = 90^\circ$, 所以 $\angle CDE = 90^\circ$, 所以 $CD \perp AB$.

(2) 解: 由 (1) 得 $\angle BEC = \angle BCE$, 所以 $BE = BC$. 因为 $AF = EF$, $FM \perp AB$, 所以 $AM = EM = OM + OE = 2$, 所以 $AE = AM + EM = 4$, $OB = OA = OM + AM = 3$, 所以 $AB = 2OA = 6$, $BC = BE = OB - OE = 2$. 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, 由勾股定理, 得 $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$.

10. (1) 证明: 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 $AD \parallel BC$, $OA = OC$, 所以 $AM \parallel CN$. 因为 $AM = CN$, 所以四边形 $AMCN$ 是平行四边形, 所以 $AN \parallel CM$, 所以 $\angle OAE = \angle OCF$, 在

$\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中, $\begin{cases} \angle OAE = \angle OCF, \\ OA = OC, \\ \angle AOE = \angle COF, \end{cases}$ 所以 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ (ASA), 所以 $OE = OF$.

(2) (i) 证明: 因为 $HE \parallel AB$, 所以 $\frac{OH}{OA} = \frac{OE}{OB}$. 由 (1) 得 $OE = OF$. 因为 $OB = OD$, $OE = OF$, 所以 $\frac{OH}{OA} = \frac{OF}{OD}$. 因为 $\angle HOF = \angle AOD$, 所以 $\triangle HOF \sim \triangle AOD$, 所以 $\angle OHF = \angle OAD$, 所以 $HF \parallel AD$.

(ii) 解: 因为 $\square ABCD$ 为菱形, 所以 $AC \perp BD$. 由 (1) 得 $OE = OF$, 所以 OH 垂直平分 EF , 所以 $HE = HF$. 又因为 $\angle EHF = 60^\circ$, 所以 $\triangle HEF$ 为等边三角形, 所以 $\angle EHO = \angle FHO = 30^\circ$, 所以 $OH = \sqrt{3}OE$. 因为 $AD = BC$, $AM = CN$, 所以 $AD - AM = BC - CN$,

即 $MD=BN$. 因为 $MD=2AM$, 所以 $\frac{AM}{BC} =$

$$\frac{AM}{AD} = \frac{AM}{AM+MD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{BN}{AD} = \frac{2AM}{AM+MD} =$$

$\frac{2}{3}$. 因为 $AD \parallel BC$, 所以 $\triangle AMH \sim \triangle CBH$,

$\triangle BNE \sim \triangle DAE$, 所以 $\frac{AH}{CH} = \frac{AM}{CB} = \frac{1}{3}$,

$$\frac{BE}{DE} = \frac{BN}{DA} = \frac{2}{3}, \text{ 即 } CH=3AH, DE=\frac{3}{2}BE,$$

所以 $AC=AH+CH=4AH, BD=BE+$

$$DE=\frac{5}{2}BE, \text{ 所以 } OA=OC=\frac{1}{2}AC=2AH,$$

$$OB=OD=\frac{1}{2}BD=\frac{5}{4}BE, \text{ 所以 } OH=OA-$$

$$AH=AH, OE=OB-BE=\frac{1}{4}BE, \text{ 所以}$$

$$OA=2OH, OB=5OE, \text{ 所以 } \frac{AC}{BD} = \frac{OA}{OB} =$$

$$\frac{2OH}{5OE} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

11. 解: (1) 因为抛物线 $y=-x^2+bx$ 的顶点横

$$\text{坐标为 } -\frac{b}{2 \times (-1)} = \frac{b}{2}, y=-x^2+2x \text{ 的顶}$$

$$\text{点横坐标为 } -\frac{2}{2 \times (-1)} = 1, \text{ 所以 } \frac{b}{2} - 1 = 1,$$

所以 $b=4$.

(2) 因为点 $A(x_1, y_1)$ 在抛物线 $y=-x^2+2x$ 上, 所以 $y_1=-x_1^2+2x_1$. 因为点 $B(x_1+t, y_1+h)$ 在抛物线 $y=-x^2+4x$ 上, 所以 $y_1+h=-(x_1+t)^2+4(x_1+t)$, 所以 $-x_1^2+2x_1+h=-(x_1+t)^2+4(x_1+t)$, 所以 $h=-t^2-2x_1t+2x_1+4t$.

(i) 因为 $h=3t$, 所以 $3t=-t^2-2x_1t+2x_1+4t$, 所以 $t(t+2x_1)=t+2x_1$, 因为 $x_1 \geq 0, t > 0$, 所以 $t+2x_1 > 0$, 所以 $t=1$, 所以 $h=3$.

(ii) 将 $x_1=t-1$ 代入 $h=-t^2-2x_1t+2x_1+4t$, 得 $h=-3t^2+8t-2=-3 \cdot$

$$\left(t-\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{10}{3}. \text{ 因为 } -3 < 0, \text{ 所以当 } t=\frac{4}{3}, \text{ 即}$$

$x_1=\frac{1}{3}$ 时, h 取得最大值, 最大值为 $\frac{10}{3}$.

D26* 南京市 2024 年中考模拟优化卷

1. A 2. A 3. B

4. B 提示: 因为点 $B(-2, m)$ 与点 $C(2, m)$ 关于 y 轴对称, 所以该函数图像存在一对关于 y 轴对称的点, 故选项 A, C 错误. 因为 $-4 < -2 < 0, m-2 < m$, 所以该函数图像在 y 轴左侧存在两个 y 随 x 增大而增大的点, 故选项 B 正确, 选项 D 错误.

5. C 提示: 由题图可知, 3 环以下 (含 3 环) 的人数为 $2+3+5=10$, 故选项 A 错误. 因为有 35 个数据, 所以中位数为按照从小到大的顺序排列的第 18 个数据, 所以 4 环 (含 4 环) 以下的人数小于 18, 所以 4 环的人数小于 $18-10=8$. 由题图可知, 4 环的人数大于 6, 所以 4 环的人数为 7, 所以 4 环以下 (含 4 环) 的人数为 $2+3+5+7=17$, 故选项 B 错误. 因为无法确定 6 环的人数, 所以无法确定 5 环的人数, 即无法确定 5 环以下 (含 5 环) 的人数, 所以选项 C 正确. 由题图可知, 7 环的人数为 1, 所以 6 环以下 (含 6 环) 的人数为 $35-1=34$, 故选项 D 错误.

6. C 提示: 由题意可知, 小丽走的路线为折线段 $A-B-C$ (点 A, C 均在圆周上, 点 B 在圆周上或在圆内部), 且 $\angle ABC=90^\circ$. 设 $AB=c, BC=a, AC=b$, 则 $a^2+c^2=b^2$. 因为 $(a-c)^2 \geq 0$, 即 $a^2-2ac+c^2 \geq 0$, 所以 $2ac \leq a^2+c^2$, 所以 $a^2+2ac+c^2 \leq 2a^2+2c^2$, 即 $(a+c)^2 \leq 2(a^2+c^2)$, 所以 $a+c = \sqrt{(a+c)^2} \leq \sqrt{2(a^2+c^2)}$ (当 $a=c$ 时, 等号成立). 因为 $a^2+c^2=b^2 \leq 200^2$ (当 AC 为直径时, 等号成立), 所以 $a+c \leq \sqrt{2b^2} \leq 200\sqrt{2}$, 即小丽行走的路程 $AB+BC$ 的最大值为 $200\sqrt{2}$.

【解后反思】求线段 (或线段和、差) 的最值, 是一类较常见的压轴题. 解决此类问题时, 通常用到的几何知识有: 两点间线段最短、垂线段最短、三角形三边间的关系、圆中最长的弦为直径等; 常用的代数知识有: 非负数的性质、函数的最值等. 本题利用非负数的性质, 通过构造完全平方公式, 巧妙地将代数和几何结合起来, 这是本题的亮点.

7. $x \neq 3$ 8. 2×10^{-8}

9. 3 提示: 因为 $\underbrace{a^n+a^n+\cdots+a^n}_{a \text{ 个 } a^n} = a^4$, 所以 $a \cdot a^n = a^4$,

即 $a^{n+1}=a^4$, 所以 $n+1=4$, 解得 $n=3$.

10. $2n-2$ 提示: 设 $x-n=y$, 则原方程可化为 $y^2+2y+2-m=0$. 由根与系数的关系, 得 $y_1+y_2=-2$, 即 $x_1-n+x_2-n=-2$, 所以 $x_1+x_2=2n-2$.

11. $\frac{2\pi}{3}$ 提示: 因为四边形 $ABCD$ 为矩形, 所以 $\angle B=90^\circ$, $AD \parallel BC$, $AD=BC=4$. 由旋转的性质, 得 $AD'=AD=4$. 在 $\text{Rt}\triangle ABD'$ 中, 由 $\sin \angle AD'B = \frac{AB}{AD'} = \frac{1}{2}$, 得 $\angle AD'B = 30^\circ$. 因为 $AD \parallel BC$, 所以 $\angle DAD' = \angle AD'B = 30^\circ$, 所以点 D 运动的路径 $\widehat{DD'}$ 的长为 $\frac{30\pi \times 4}{180} = \frac{2\pi}{3}$.

12. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ 提示: 设菱形的边长 $AD=CD=x$. 因为 $AD \parallel BC$, 所以 $\angle ADE = \angle C$. 因为 $AE \perp CD$, $EF \perp BC$, 所以 $\angle AED = \angle EFC = 90^\circ$, 所以 $\triangle EAD \sim \triangle FEC$. 所以 $\frac{AD}{EC} = \frac{AE}{EF}$, 即 $\frac{x}{x+DE} = \frac{3}{4}$, 所以 $DE = \frac{1}{3}x$. 在 $\text{Rt}\triangle EAD$ 中, 由勾股定理, 得 $AE^2 + DE^2 = AD^2$, 即 $3^2 + \left(\frac{1}{3}x\right)^2 = x^2$, 解得 $x = \frac{9\sqrt{2}}{4}$. 所以菱形的边长为 $\frac{9\sqrt{2}}{4}$.

13. $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$ 提示: 连接 BD , 设 $\odot D$ 与 y 轴相切于点 E , 连接 DE 并反向延长交 AB 于点 F , 则 $EF \perp OC$. 设 $\odot D$ 的半径是 r , 则 $DB=DE=r$. 因为点 A 的坐标是 $(4, 0)$, 且四边形 $OABC$ 是正方形, 所以 $BC=AB=OC=OA=4$. 易证四边形 $EFBC$ 是矩形, 所以 $EF=BC=4$, $CE=BF$, $\angle EFB = 90^\circ$, 所以 $DF=4-r$, $EF \perp AB$, 所以 $BF = \frac{1}{2}AB = 2$, 所以 $CE=BF=2$, 所以 $OE=OC-CE=2$. 在 $\text{Rt}\triangle BDF$ 中, 由勾股定理, 得 $BD^2 = DF^2 + BF^2$, 即 $r^2 = (4-r)^2 + 2^2$, 解得 $r = \frac{5}{2}$, 所以 $DE = \frac{5}{2}$. 所以点 D 的坐标为 $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$.

14. $\frac{120}{13}$ 提示: 由旋转的性质, 得 $\angle B'AD' = \angle BAD = 90^\circ$, $AB'=AB=5$, $AD'=AD=BC=12$. 所以 $\frac{AD'}{AB'} = \frac{AD}{AB}$, $\angle B'AD' - \angle B'AD = \angle BAD - \angle B'AD$, 即 $\angle DAD' = \angle BAB'$, 所以 $\triangle DAD' \sim \triangle BAB'$. 所以 $\frac{AD'}{AB'} = \frac{DD'}{BB'}$, 即 $\frac{12}{5} = \frac{DD'}{BB'}$, 所以 $DD' = \frac{12}{5}BB'$. 过点 A

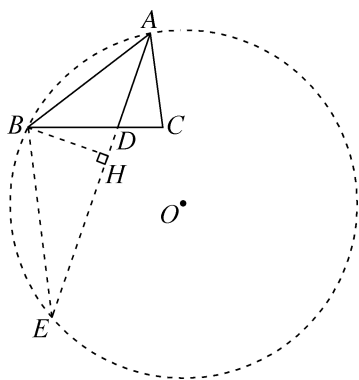
作 $AH \perp BD$ 于点 H . 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 由勾股定理, 得 $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 13$. 易证 $\triangle BAD \sim \triangle BHA$, 所以 $\frac{BD}{BA} = \frac{BA}{BH}$, 即 $\frac{13}{5} = \frac{5}{BH}$, 解得 $BH = \frac{25}{13}$. 因为 $AB'=AB$, $AH \perp BD$, 所以 $BB' = 2BH = \frac{50}{13}$, 所以 $DD' = \frac{12}{5}BB' = \frac{120}{13}$.

【解后反思】运用旋转相似三角形, 即 $\triangle DAD' \sim \triangle BAB'$, 把未知线段 DD' 转化成与已知线段联系紧密的线段 BB' , 进一步根据等腰三角形的“三线合一”性质添设辅助线, 把求 BB' 转化成求 BH , 并利用“母子型” $\triangle BAD \sim \triangle BHA$ 来求之. 通过相似, 在未知与已知之间建立桥梁, 是解决本题的关键.

15. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 提示: 设该二次函数图像的顶点为 A . 由 $y = ax^2 + 2x + 3 = a\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + 3 - \frac{1}{a}$, 得点 $A\left(-\frac{1}{a}, 3 - \frac{1}{a}\right)$. 所以 $OA^2 = \left(-\frac{1}{a}\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{a}\right)^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 + 9 - \frac{6}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{a}\right)^2 - \frac{6}{a} + 9 = 2\left(\frac{1}{a} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$. 当 $\frac{1}{a} = \frac{3}{2}$ 时, OA^2 有最小值, 为 $\frac{9}{2}$, 所以 OA 的最小值为 $\sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 即该图像的顶点与原点 O 的距离的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

16. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 提示: 如图, 过点 B 作 $BE \parallel AC$, 交 AD 的延长线于点 E , 则 $\angle ABE = 180^\circ - \angle BAC = 120^\circ$. 设 $S_{\triangle ACD} = a$. 因为 $BD = 2CD$, 所以 $S_{\triangle ABD} = 2a$, $S_{\triangle ABC} = 3a$, 当 a 取最大值时, $\triangle ABC$ 的面积最大. 因为 $BE \parallel AC$, 所以 $\triangle ACD \sim \triangle EBD$, 所以 $\frac{AD}{ED} = \frac{CD}{BD} = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{2}{DE} = \frac{1}{2}$, $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle EBD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, 所以 $DE = 4$, $S_{\triangle EBD} = 4a$, 所以 $AE = AD + DE = 6$, $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle EBD} = 6a$. 因为 $\angle ABE = 120^\circ$, 所以点 B 在以 AE 为弦, 圆周角为 120° 的劣弧上运动, 过点 B 作 $BH \perp AE$ 于点 H . 因为 AE 长是定值, 所以当 BH 长取最大值时, $\triangle ABE$ 的面积最大, 此时 a 的值最大. 由图可知, 当 B 是 $\widehat{AE}$ 的中点时, BH 长最大, 此时 $\widehat{AB} = \widehat{BE}$, 所以 $AB = BE$, 所以 $\angle BEH = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABE) = 30^\circ$. 因为 $BH \perp$

AE, 所以 $EH = \frac{1}{2} AE = 3$. 在 $\text{Rt} \triangle BEH$ 中, 由 $\tan \angle BEH = \frac{BH}{EH} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 得 $BH = \sqrt{3}$. 所以 $\triangle ABE$ 面积的最大值为 $6a = \frac{1}{2} AE \cdot BH = 3\sqrt{3}$. 所以 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 a 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $3a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

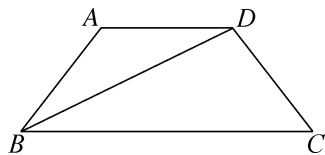


【解后反思】本题条件比较零散,通过添设辅助线,构造“X”型相似三角形,即 $\triangle ACD \sim \triangle EBD$,把分散的条件转化到 $\triangle ABE$ 中,是解决本题的关键.在寻找 BH 长的最大值时,也可以过点 B 作 $BG \parallel AE$,得到 BH 为这两条平行线间的距离,观察图形可知,当 BG 与 $\odot O$ 切于点 B 时, BH 的长最大,此时由垂径定理也可证得 B 是 $\widehat{AE}$ 的中点.

17. 解: 原式 $= \frac{(a+b)(a-b)}{ab} \div \frac{a-b}{a} = \frac{(a+b)(a-b)}{ab} \cdot \frac{a}{a-b} = \frac{a+b}{b}$. 当 $a = -2$, $b = 1$ 时, 原式 $= -1$.

18. 解: 解 $2x + 1 < 5$, 得 $x < 2$. 解 $\frac{x-1}{4} \leq \frac{x}{3}$, 得 $x \geq -3$. 所以原不等式组的解集为 $-3 \leq x < 2$. 它的整数解为 $-3, -2, -1, 0, 1$.

19. (1) 证明: 因为 BD 平分 $\angle ABC$, 所以 $\angle ABD = \angle CBD$. 因为 $AB = AD$, 所以 $\angle ABD = \angle ADB$, 所以 $\angle CBD = \angle ADB$. 所以 $AD \parallel CB$. 因为 $AB = CB$, $AB = AD$, 所以 $AD = CB$. 所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 因为 $AB = CB$, 所以 $\square ABCD$ 是菱形.
(2) 解: 结论不成立. 反例如图所示, $AB = AD = CD$, BD 平分 $\angle ABC$, 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形.



20. 解: (1) $\frac{1}{3}$

(2) 将一等奖区域记为 A, 二等奖平均划分为两个区域, 分别记为 B, C. 易知 A, B, C 三个区域圆心角均为 120° , 即转动转盘指针指向三个区域的可能性是相同的, 所以小丽转两次转盘共出现 9 种等可能的结果, 它们分别为 $(A, A), (A, B), (A, C), (B, A), (B, B), (B, C), (C, A), (C, B), (C, C)$. 满足两次一等奖 (记为事件 M) 的结果有 1 种, 即 (A, A) , 所以 $P(M) = \frac{1}{9}$.

21. 解: (1) 108

(2) 设饮品总销量为 a . 则总成本为 $20\%a \times 9 + 30\%a \times 14 + 30\%a \times 10 + 20\%a \times 15 = 12a$ (元), 总利润为 $20\%a \times 9 \times 25\% + 30\%a \times 14 \times 20\% + 30\%a \times 10 \times 15\% + 20\%a \times 15 \times 30\% = 2.64a$ (元). 所以平均利润为 $\frac{2.64a}{12a} \times 100\% = 22\%$.

答: 该饮品店这个销售周期内四种饮品的平均利润率是 22%.

22. 解: 设梯子长为 x m. 则 $AB = DE = x$ m. 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle A = 50^\circ$, 由 $\cos A = \frac{AC}{AB}$, 得 $AC = AB \cdot \cos A \approx 0.64x$ m. 在 $\text{Rt} \triangle CDE$ 中, $\angle EDC = 75^\circ$, 所以 $CD = DE \cdot \cos \angle EDC \approx 0.26x$ m. 因为 $AC - CD = AD$, 即 $0.64x - 0.26x = 1.9$, 所以 $x = 5$. 在 $\text{Rt} \triangle CDE$ 中, $\angle EDC = 75^\circ$, 所以 $CE = DE \cdot \sin \angle EDC \approx 0.97 \times 5 = 4.85$ (m).

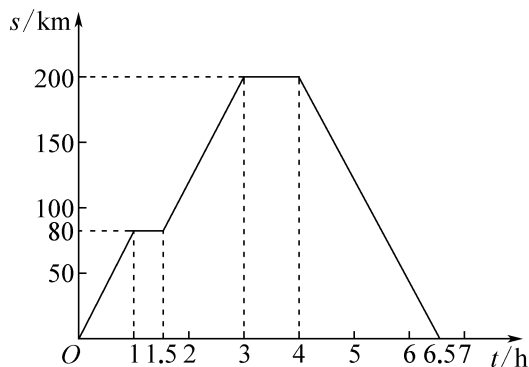
答: 使用这架梯子最高可以攀上 4.85 m 高的墙.

23. 解: (1) 100

(2) 设出发时汽车的剩余电量为 a kW · h, 由汽车每小时的耗电量均相同, 得 $\frac{a-50}{1} =$

$\frac{100-a}{3-1.5}$, 解得 $a=70$. 所以点 B 的坐标为 $(3, 70)$. 设线段 AB 对应的函数表达式为 $Q=kt+b$. 将点 $A(1.5, 100), B(3, 70)$ 代入, 得 $\begin{cases} 1.5k+b=100, \\ 3k+b=70, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-20, \\ b=130. \end{cases}$ 所以线段 AB 对应的函数表达式为 $Q=-20t+130$ ($1.5 \leq t \leq 3$).

(3) s 与 t 之间的函数图像如图所示.



24. (1) 证明: 连接 OA, OC , OA 交 BF 于点 G .

因为 CD 切 $\odot O$ 于点 C , 所以 $OC \perp CD$, 即 $\angle OCA + \angle DCE = 90^\circ$. 因为 $DC = DE$, 所以 $\angle DCE = \angle DEC$. 因为 $\angle DEC = \angle AEG$, 所以 $\angle DCE = \angle AEG$. 因为 $OA = OC$, 所以 $\angle OCA = \angle OAC$, 所以 $\angle OAC + \angle AEG = 90^\circ$, 所以 $\angle AGE = 90^\circ$, 即 $OA \perp BF$. 由垂径定理, 得 $FG = BG$, 所以 OA 垂直平分 BF , 所以 $AF = AB$.

(2) 证明: 连接 BC . 因为 $AF = AB$, 所以 $\angle AFB = \angle ABE$. 由同弧所对的圆周角相等, 得 $\angle AFB = \angle ACB$. 所以 $\angle ABE = \angle ACB$. 又因为 $\angle BAE = \angle CAB$, 所以 $\triangle ABE \sim \triangle ACB$.

所以 $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AC}$, 即 $AB^2 = AE \cdot AC$.

(3) $\frac{16\sqrt{15}}{15}$ 提示: 连接 OC , 并反向延长交 AB 于点 H , 连接 OA, OB, BC . 设 $\odot O$ 的半径为 r , 则 $OA = OC = r$. 因为 $AE = 2, EC = 6$, 所以 $AC = AE + EC = 8$. 由(2)可知, $AB^2 = AE \cdot AC = 16$, 所以 $AB = 4 = BE$. 由(2)可知, $\triangle ABE \sim \triangle ACB$, 所以 $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CB}$, 即 $\frac{4}{8} = \frac{4}{BC}$, 解得 $BC = 8$, 所以 $BC = AC$. 又因为 $OA =$

OB , 所以 OC 垂直平分 AB , 所以 $AH = BH = \frac{1}{2}AB =$

2. 在 $Rt \triangle BCH$ 中, 由勾股定理, 得 $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = 2\sqrt{15}$. 所以 $OH = CH - OC = 2\sqrt{15} - r$. 在 $Rt \triangle AOH$ 中, 由勾股定理, 得 $OH^2 + AH^2 = OA^2$, 即

$(2\sqrt{15} - r)^2 + 2^2 = r^2$, 解得 $r = \frac{16\sqrt{15}}{15}$. 所以 $\odot O$ 的半

径为 $\frac{16\sqrt{15}}{15}$.

25. 解: (1) 由题意, 得点 A 的坐标为 $(0, -a)$, 点 B 的坐标为 $(4, -a)$. 因为点 A, B 均在该函数的图像上, 且它们的纵坐标相同, 所以该函数图像的对称轴为直线 $x = \frac{0+4}{2} = 2$.

(2) ①由(1)可知, 该函数图像的对称轴为直线 $x = 2$, 所以该函数图像顶点的横坐标为 $\frac{b}{2a} = 2$, 即 $b = 4a$. 所以该二次函数的表达式

为 $y = ax^2 - 4ax - a$. 将点 $M(1, 1-a)$ 代入, 得 $1-a = a - 4a - a$, 解得 $a = -\frac{1}{3}$.

② $0 < a \leq \frac{3}{4}$ 或 $-\frac{1}{3} \leq a < 0$. 提示: 将 $x = 1$ 代

入 $y = ax^2 - 4ax - a$, 得 $y = -4a$; 将 $x = 3$ 代入 $y = ax^2 - 4ax - a$, 得 $y = -4a$. 当 $a > 0$ 时, 画出草图如图 1, 抛物线开口向上, 要使图像与线段 MN 只有一个交

点, 则 $-4a \geq -3$, 解得 $a \leq \frac{3}{4}$, 所以 $0 < a \leq \frac{3}{4}$; 当 $a <$

0 时, 画出草图如图 2, 抛物线开口向下, 要使图像与线段 MN 只有一个交点, 则 $1-a \geq -4a$, 解得 $a \geq -\frac{1}{3}$, 所以 $-\frac{1}{3} \leq a < 0$. 综上所述, a 的取值范围是

$0 < a \leq \frac{3}{4}$ 或 $-\frac{1}{3} \leq a < 0$.

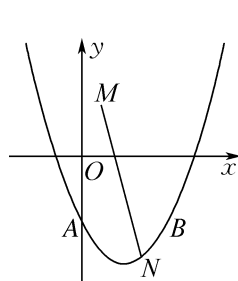


图 1

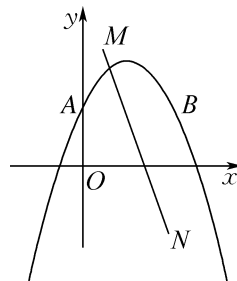


图 2

【解后反思】求与函数相关的字母参数的取值范围时,若不能直接运用函数的性质求解,我们一般根据题意画出图形,根据点的位置,确定相关点对应的横、纵坐标的正负情况,运用“数形结合”思想得到关于字母的不等式(组)来求解.

26. 解: (1) ①选择小明的思路. 证明如下:

因为 $CD = CA$, 所以 $\angle CAD = \angle D$, 所以 $\angle ACB = \angle CAD + \angle D = 2\angle D$. 因为 $\angle ACB = 2\angle B$, 所以 $\angle CAD = \angle D = \angle B$, 所以 $AB = AD$. 又因为 $\angle ADC = \angle BDA$, 所以 $\triangle ACD \sim \triangle BAD$, 所以 $\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}$, 即 $AD^2 = CD \cdot BD$. 因为 $BC = a, CD = AC = b, AD = AB = c$, 所以 $c^2 = b(a+b)$, 即 $c^2 - ab - b^2 = 0$.

②选择小红的思路. 证明如下:

由翻折可知, $\angle B = \angle DCB, BD = CD$. 因为 $\angle ACB = 2\angle B$, 所以 $\angle ACB = 2\angle DCB$. 所以 $\angle ACD = \angle DCB = \angle B$. 又因为 $\angle A = \angle A$, 所以 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$, 所以 $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{CD}{BC}$. 因为 $BC = a, AC = b, AB = c$, 所以 $AD = \frac{b^2}{c}, CD = \frac{ab}{c}$. 因为 $AD + BD = AB$, 所以 $\frac{b^2}{c} + \frac{ab}{c} = c$, 即 $c^2 - ab - b^2 = 0$.

(2) 作法不唯一, 如下作法供参考.

作法 1 如图 1, ①作线段 $CD = n$; ②以点 C 为圆心, n 为半径作弧, 以点 D 为圆心, m 为半径作弧, 两弧相交于点 A ; ③以点 A 为圆心, m 为半径作弧, 交 DC 的延长线于点 B , 连接 AB , 则 $\triangle ABC$ 即为所求.

作法 2 如图 2, ①以点 A 为圆心, 分别以 m, n 为半径作弧; ②在大圆弧上取一点 D , 连接 AD , 作 AD 的垂直平分线交小圆弧于点 C , 连接 AC ; ③连接 DC 并延长, 交大圆弧于点 B , 连接 AB , 则 $\triangle ABC$ 即为所求.

作法 3 设 $BC = x$, 由(1)得 $m^2 - nx - n^2 = 0$, 即 $(m+n)(m-n) = nx$. 如图 3, ①构造相似

图形得到线段 x ; ②以 $BC = x, AB = m, AC = n$ 即可作出 $\triangle ABC$. (作图痕迹略)

作法 4 由小红的证明过程可知, 设 $AD = x$, 则 $n^2 = mx$. 如图 4, ①构造相似图形得到线段 x ; ②以 $AD = x, CD = m - x, AC = n$ 作出 $\triangle ADC$; ③在 AD 的延长线上截取 $DB = DC$, 连接 BC , 则 $\triangle ABC$ 即为所求. (作图痕迹略)

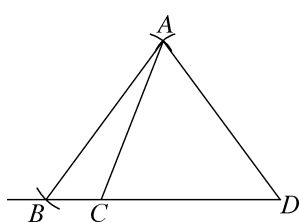


图 1

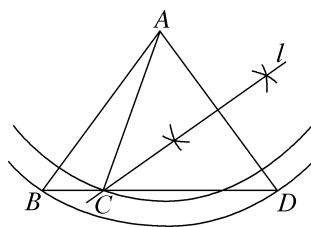


图 2

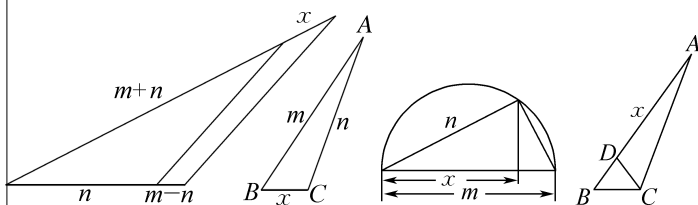


图 3

图 4

(3) 当 $AB = 4$ 时, $l = 4k + 4, 8 < l < 12$; 当 $AC = 4$ 时, $l = 4k^2 + 4k, 8 < l < 24$; 当 $BC = 4$ 时, $l = \frac{4}{k-1} + 4, l > 8$. 提示: 因为 $\angle C = 2\angle B$, 所以 $AB > AC$, 所以 $k > 1$. 当 $AB = 4 = c$ 时,

$\frac{4}{AC} = k$, 所以 $AC = \frac{4}{k} = b$. 由(1)得 $4^2 - a \cdot \frac{4}{k} -$

$\left(\frac{4}{k}\right)^2 = 0$. 解得 $a = 4k - \frac{4}{k}$. 所以 $l = 4k - \frac{4}{k} + \frac{4}{k} +$

$4 = 4k + 4$. 由 $\triangle ABC$ 三边关系, 得 $1 < k < 2$, 所以 $8 <$

$l < 12$. 当 $AC = 4 = b$ 时, $\frac{AB}{4} = k$, 所以 $AB = 4k = c$. 由

(1)得 $(4k)^2 - 4a - 4^2 = 0$. 解得 $a = 4k^2 - 4$. 所以 $l =$

$4k^2 - 4 + 4 + 4k = 4k^2 + 4k$. 由 $\triangle ABC$ 三边关系, 得

$1 < k < 2$, 所以 $8 < l < 24$. 当 $BC = 4 = a$ 时, 因为 $\frac{AB}{AC} =$

k , 所以 $AB = kAC = c$. 由(1)得 $(kAC)^2 - 4AC -$

$AC^2 = 0$. 解得 $AC = \frac{4}{k^2 - 1}$, 所以 $AB = \frac{4k}{k^2 - 1}$. 所以 $l =$

$4 + \frac{4}{k^2 - 1} + \frac{4k}{k^2 - 1} = \frac{4}{k - 1} + 4$. 由 $\triangle ABC$ 三边关系, 得

$1 < k < 2$, 所以 $l > 8$.

【解后反思】本题给定的三角形中的两个内角为二倍角关系,如何利用好这个条件是解题的关键.第(1)问中小明通过构造等腰三角形、小红通过翻折形成角平分线,从而将二倍角进行了转化,进而运用相似解决问题.第(2)问中的尺规作图,常常和几何图形的特征性质结合起来考查.例如作法1,2均借助于小明的思路.作法1通过观察发现 $\triangle ACD$ 的三边长是确定的,其中 $CD=AC=n$, $AD=AB=m$,根据“SSS”即可作出 $\triangle ACD$,进而作出 $\triangle ABC$;作法2则是由 $CD=AC$ 推断出点 C 必然在线段 AD 的垂直平分线上,从而作出点 C ,进而作出点 B ;作法3借助(1)中的证明结论,想到构造以线段 $BC, m+n, m-n, n$ 的A型相似三角形,从而得到 BC 的长,进而作出 $\triangle ABC$;作法4借助小红的思路,构造以线段 AD, n, m 为边的母子型相似三角形,从而得到 AD 的长,进而作出 $\triangle ABC$.

27. (1) ③

(2) **证明:**连接 OP . 因为 $\odot O$ 与边 CD 相切于点 P ,所以 $OP \perp CD$,所以 $\angle OPD = 90^\circ$,即 $\angle APO + \angle APD = 90^\circ$. 因为 AB 为 $\odot O$ 的直径,所以 $\angle APB = 90^\circ$,即 $\angle APO + \angle BPO = 90^\circ$,所以 $\angle APD = \angle BPO$. 因为 $OP = OB$,所以 $\angle BPO = \angle ABP$,所以 $\angle APD = \angle ABP$.

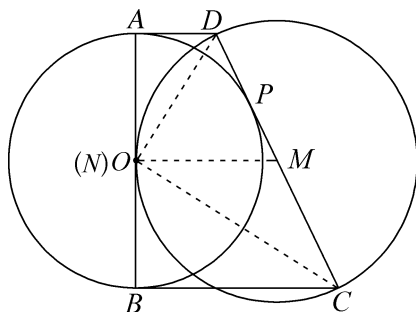
(3) **解:** $AD \parallel BC$. 理由如下:

连接 AP, DN 交于点 E ,连接 MN, OP 交于点 Q ,连接 BP, CN 交于点 F . 由(2)得 $\angle APD = \angle ABP$, $\angle APB = 90^\circ$. 设 $\angle APD = \angle ABP = m^\circ$,则 $\angle AOP = 2m^\circ$. 同理可得, $\angle AND = \angle DCN$. 设 $\angle AND = \angle DCN = n^\circ$,则 $\angle NMD = 2n^\circ$. 因为 $\odot O$ 与 $\odot M$ 均是四边形 $ABCD$ 的径切圆,其切点分别为 P, N ,所以 $OP \perp CD, MN \perp AB$,所以 $\angle OPM = \angle MNO = 90^\circ$,所以 $\angle PQM + \angle NMD = 90^\circ$, $\angle NQO + \angle AOP = 90^\circ$. 因为 $\angle PQM = \angle NQO$,所以 $\angle NMD = \angle AOP$,所以 $2m = 2n$,即 $m = n$. 所以 $\angle ABP = \angle APD = \angle AND = \angle DCN$,所以 $AP \parallel CN, ND \parallel BP$,所以四边形 $ENFP$ 为平行四边形. 又因为 $\angle APB = 90^\circ$,所以平行四边形 $ENFP$ 为矩形,所以 $\angle NEP = \angle NFP =$

$90^\circ, NE = PF, NF = PE$. 所以 $\angle AED = \angle NEP = \angle NFP = \angle BFC = 90^\circ$. 因为 $\angle AND = \angle APD, \angle AEN = \angle DEP$,所以 $\triangle AEN \sim \triangle DEP$,所以 $\frac{AE}{DE} = \frac{NE}{PE} = \frac{PF}{NF}$. 同理可得, $\triangle CFP \sim \triangle BFN$,所以 $\frac{CF}{BF} = \frac{PF}{NF}$,所以 $\frac{AE}{DE} = \frac{CF}{BF}$,即 $\frac{AE}{CF} = \frac{DE}{BF}$. 又因为 $\angle AED = \angle BFC = 90^\circ$,所以 $\triangle AED \sim \triangle CFB$,所以 $\angle ADE = \angle CBF$. 因为 $\angle AED = 90^\circ$,所以 $\angle ADE + \angle DAE = 90^\circ$,所以 $\angle CBF + \angle DAE = 90^\circ$. 因为 $\angle APB = 90^\circ$,所以 $\angle BAP + \angle ABP = 90^\circ$,所以 $\angle DAB + \angle ABC = \angle DAE + \angle BAP + \angle ABP + \angle CBF = 180^\circ$,所以 $AD \parallel BC$.

(4) **解:** $\odot O$ 和 $\odot M$ 的半径分别是 $\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}$. **提示:**如图,当点 O 和点 N 恰好重合时,由

(3)得 $AD \parallel BC$. 因为 O, M 分别为 AB, CD 的中点,所以 MO 为梯形 $ABCD$ 的中位线,所以 $OM \parallel AD \parallel BC, OM = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{a+b}{2}$,即 $\odot M$ 的半径长为 $\frac{a+b}{2}$. 由条件可知, $MO \perp AB$,所以 $AD \perp AB, BC \perp AB$,所以 $\angle DAO = \angle OBC = 90^\circ$. 因为 CD 为 $\odot M$ 的直径,所以 $\angle COD = 90^\circ$,易证 $\triangle AOD \sim \triangle BCO$,所以 $\frac{OA}{CB} = \frac{AD}{BO}$. 因为 $OA = OB$,所以 $OA^2 = AD \cdot BC = ab$,所以 $OA = \sqrt{ab}$ (负值舍去). 所以 $\odot O$ 的半径长为 $\sqrt{ab}$.



【解后反思】本题属于新定义型问题.第(1)问根据定义即可判断.第(2)问是“弦切角定理”的证明,此题中 $\angle APD$ 即为弦切角.弦切角等于它所夹的弧所对的圆心角度数的一半,也等于它所夹的弧所对的圆周角度数.第(3)问首先猜想 AD 与 BC 的位置关系,然后充分利用(2)中的结论,通过相似转化角,进而根据“同旁内角互补,两直线

平行”得以证明.第(4)问中用到了梯形的中位线定理,这个知识点在填空、选择题中可以直接运用,但是在解答题中需要证明,可以连接 AM 并延长交 BC 的延长线于点 G ,把 $AD+BC$ 转化成 BG ,运用全等三角形的性质和判定、三角形的中位线定理来证明.

D27* 苏州市 2024 年中考模拟优化卷

1. B 2. B 3. C 4. D 5. D 6. C

7. C 提示:连接 AC ,交边 EF 于点 M ,连接 OE,OF .

易知 AC 是 $\odot O$ 的直径, O 是 AC 的中点. 因为 $\triangle AEF$ 为等边三角形,所以 $AE=AF$. 又因为 $OE=OF$,所以 AC 垂直平分 EF . 易得 $\angle OAE=\angle OEA=\angle OEM=30^\circ$. 设 $\odot O$ 的半径为 r ,则 $OC=OE=r$. 在 $\text{Rt}\triangle OEM$ 中, $OM=\frac{r}{2}$, $EM=\frac{\sqrt{3}r}{2}$,所以 $EF=2EM=\sqrt{3}r$, $CM=OC-OM=\frac{r}{2}$. 易证 $\triangle CGH$ 为等腰直角三角形,所以 $GH=2CM=r$,所以 $\frac{EF}{GH}=\sqrt{3}$.

8. C 提示:由条件,得 $G(A,B)=|0-m|+|5-(m+1)|=|m|+|4-m|$,从而当 $0\leq m\leq 4$ 时, $G(A,B)$ 有最小值,最小值为 4.

【方法总结】本题根据新定义,将问题化归为有关绝对值的函数来分析,形如此类函数,通常有两种解法:其一是利用绝对值的几何意义(数轴上表示两点之间的距离),从而当自变量 x 位于已知两数(0 和 4)之间时,绝对值之和最小;其二是分类讨论($m<0, 0\leq m\leq 4, m>4$),化归为分段函数,在平面直角坐标系中作出图像,进而判断得之.

9. $x>0$ 10. 乙每小时比甲多做 6 个 11. $\sqrt{5}$

12. $\frac{\pi}{4}$

13. (12,4) 提示:设正方形 $ADEF$ 的边长为 a ,则点 E 的坐标为 $(a+8,a)$. 因为点 B,E 都在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像上,所以 $(a+8)a=8\times 6$,解得 $a=4$ 或 $a=-12$ (舍去). 所以点 E 的坐标为 (12,4).

14. 5 提示:连接 AD . 由勾股定理,得 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=10$. 因为 $\triangle AMN\sim\triangle ACB$,所以 $\angle AMN=\angle ACB$. 由折叠的性质,得 $AD\perp MN$,所以 $\angle BAD=90^\circ-\angle AMN=90^\circ-\angle ACB=\angle B$,所以 $AD=BD$. 同理可得 $AD=CD$,所以 $CD=BD=\frac{1}{2}BC=5$.

15. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ 提示:取 CD 的中点 M ,连接 MG ,交 BA 的延长线于点 N ,过点 M 作 $MH\perp AC$ 于点 H . 易证 $\triangle BMN$ 为等边三角形,且 $BN=BM=BC+CM=8$, $FN=BN-BF=5$. 在 $\text{Rt}\triangle CMH$ 中, $CM=\frac{1}{2}CD=2$, $\angle MCH=\angle ACB=60^\circ$,所以 $MH=CM\cdot\sin\angle MCH=\sqrt{3}$. 由中位线定理,得 $MG\parallel AC$,从而点 G 在平行于 AC 且到 AC 的距离为 $\sqrt{3}$ 的一条定直线 MN 上运动. 当 $FG\perp MN$ 时,线段 FG 长最小. 最小值 $FG=FN\cdot\sin\angle FNG=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

16. $-3\leq a<-2$ 提示:令 $x^2+x+a+3=3x$,即 $x^2-2x+a+3=0$,不妨记二次函数 $y=x^2-2x+a+3$. 由题意可知,当 $0\leq x\leq 3$ 时,该二次函数的图像与 x 轴有两个交点. 易知该二次函数的对称轴为直线 $x=1$,故必须满足下列两个条件:①根的判别式 $4-4(a+3)>0$;②当 $x=0$ 和 $x=3$ 时, $y\geq 0$,即 $a+3\geq 0$ 且 $9-6+a+3\geq 0$. 解得 $-3\leq a<-2$.

【方法总结】本题将两个函数图像的交点问题转化为有关一元二次方程根的分布问题,进而转化为新的二次函数与 x 轴的交点问题,从而考虑根的判别式,使新的二次函数必与 x 轴有交点,再考虑 x 取临界位置时,新二次函数的函数值与零的大小关系,从而探究得到相关参数的取值范围.

本题也可直接求解,满足下列条件:①题中抛物线与直线有 2 个交点,即 $x^2+x+a+3<3x$ 有解;②当 $x=0$ 和 $x=3$ 时,二次函数的值不小于一次函数的值.

17. 解:原式 $=1-4+1=-2$.

18. 解: $1-2x=5(x+3)$, $-2x-5x=15-1$, $-7x=14$, $x=-2$.

经检验, $x=-2$ 为原方程的解.

19. 解:原式 $=\frac{(a+1)(a-1)-3}{a-1}\cdot\frac{a-1}{a^2+4a+4}=\frac{a^2-4}{a-1}\cdot\frac{a-1}{(a+2)^2}=\frac{(a+2)(a-2)}{(a+2)^2}=\frac{a-2}{a+2}$. 当 $a=-1$ 时,原式 $=-3$. (答案不唯一,满足 $a\neq 1, a\neq -2$ 即可)

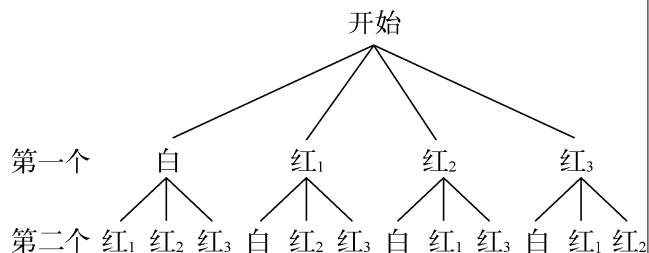
20. (1) 证明:由题意可知, $AB=DC$, $AC=DB$, 又因为 $BC=CB$,所以 $\triangle DCB\cong\triangle ABC$.

(2) 解:因为 $AB=CD$, $AC=BD$,所以四边形 $ABDC$ 是平行四边形,所以 $AB\parallel CD$,

$$\angle ACD = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

21. (1) 0.75 3

(2) 解:画树状图如下:



由图可知,共有 12 种等可能的结果,其中刚好是一个红球和一个白球的结果有 6 种,所以所求概率为 $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

22. 解:(1) 50

(2) 样本中,每周家务劳动时间在 2~2.5 h 内的人数最多,这个范围的人数为 $50 \times 28\% = 14$.

(3) 该校八年级学生每周家务劳动时间不少于 2 h 的人数为 $900 \times (28\% + 24\% + 12\%) = 576$.

23. 解:(1) 过点 C 作 OB 的垂线,分别交仰角线、水平线、俯角线于点 E, F, D. 易知 $AF = OC = 50$ cm, $CF = OA = 160$ cm. 在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中, $EF = AF \cdot \tan \angle EAF \approx 50 \times 0.27 = 13.5$ (cm), 所以 $CE = CF + EF = 160 + 13.5 = 173.5$ (cm).

答:欢欢的身高约是 173.5 cm.

(2) 因为 $148 + 4 = 152 < 160$, 所以要想乐乐被识别到, 只需乐乐头部最下方位于或高于俯角线即可. 设乐乐站在点 G 处踮起脚尖时头部最下方恰好位于俯角线上, 过点 G 作垂直于 OB 的垂线, 分别交仰角线、水平线、俯角线于点 M, P, N. 此时 $GN = 148 + 4 - 17 = 135$ (cm), $PN = 160 - 135 = 25$ (cm). 在

$\text{Rt}\triangle APN$ 中, $AP = \frac{PN}{\tan \angle PAN} \approx \frac{25}{0.27} \approx 92.6$ (cm).

答:乐乐踮起脚尖后应站在距摄像头水平距离不小于 92.6 cm, 不大于 150 cm 的区域内才能被识别到.

24. 解:(1) 过点 C 作 $CE \perp x$ 轴于点 E. 将点

$A(-6, 0)$ 代入直线 $y = \frac{2}{3}x + b$, 得 $b = 4$, 所以点 $B(0, 4)$, 所以 $AO = 6$, $BO = 4$. 因为

$S_{\triangle AOB} = 2S_{\triangle BOC}$, 所以 $AB = 2BC$, 所以 $\frac{AC}{AB} =$

$\frac{2BC + BC}{2BC} = \frac{3}{2}$. 因为 $CE \parallel BO$, 所以 $\triangle AEC \sim$

$\triangle AOB$, $\frac{CE}{BO} = \frac{AE}{AO} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$, 所以 $CE =$

$\frac{3}{2}BO = 6$, $AE = \frac{3}{2}AO = 9$. 所以 $OE = AE -$

$AO = 3$. 所以点 $C(3, 6)$, 所以 $k = 18$.

(2) 过点 D 作 $DF \perp CE$ 于点 F. 由(1)可知,

反比例函数的表达式为 $y = \frac{18}{x} (x > 0)$. 设点

$D(m, \frac{18}{m})$, 则 $CF = 6 - \frac{18}{m}$, $DF = m - 3$. 因为

$CD \perp OC$, 所以 $\angle OCE + \angle DCF = 90^\circ$. 因为

$\angle OCE + \angle COE = 90^\circ$, 所以 $\angle DCF =$

$\angle COE$. 又因为 $\angle CEO = \angle DFC = 90^\circ$, 所以

$\triangle CEO \sim \triangle DFC$, 所以 $\frac{CE}{DF} = \frac{OE}{CF}$, 即 $\frac{6}{m-3} =$

$\frac{3}{6 - \frac{18}{m}}$, 整理得 $m^2 - 15m + 36 = 0$, 解得

$m_1 = 12$, $m_2 = 3$ (舍去). 所以点 $D(12, \frac{3}{2})$.

25. (1) 证明:连接 BE. 因为 AB 为 $\odot O$ 的直径,

所以 $\angle C = \angle AEB = 90^\circ$, 所以 $\angle CAF +$

$\angle AFC = 90^\circ$. 因为 BD 为 $\odot O$ 的切线, 所以

$\angle ABD = 90^\circ$, 所以 $\angle BAD + \angle D = 90^\circ$. 因为

AD 平分 $\angle BAC$, 所以 $\angle CAF = \angle BAD$,

所以 $\angle D = \angle AFC = \angle BFD$, 所以 $BD =$

BF . 又因为 $BE \perp DF$, 所以 E 为线段 DF 的中点.

(2) 解:设 $BD = x$. 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 和 $\text{Rt}\triangle BED$

中, 由 $\cos D = \frac{BD}{AD} = \frac{DE}{BD} = \frac{1}{3}$, 得 $AD = 3BD =$

$3x$, $DE = \frac{1}{3}BD = \frac{x}{3}$. 由勾股定理, 得 $AB^2 +$

$BD^2 = AD^2$, 即 $(6\sqrt{2})^2 + x^2 = (3x)^2$, 解得

$x=3$ (负值已舍). 所以 $BD=3, AD=9, DE=1$. 所以 $AF=AD-2DE=7$. 在 $\text{Rt}\triangle ACF$ 中, 由 $\cos\angle AFC=\cos D=\frac{CF}{AF}=\frac{1}{3}$, 得 $CF=\frac{1}{3}AF=\frac{7}{3}$. 由勾股定理, 得 $AC=\sqrt{AF^2-CF^2}=\frac{14\sqrt{2}}{3}$.

26. (1) $BM+DN=MN$

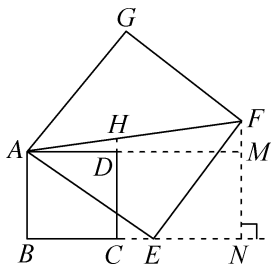
(2) ①解: (i) 连接 EH . 因为四边形 $AEFG$ 为正方形, 所以 $\angle EAF=45^\circ$. 由 (1) 可知, $BE+DH=EH$. 设 $BE=x$, 则 $CE=5-x$. 因为 $DH=3$, 则 $CH=2, EH=x+3$. 在 $\text{Rt}\triangle CEH$ 中, 由勾股定理, 得 $CE^2+CH^2=EH^2$, 即 $(5-x)^2+4=(x+3)^2$, 解得 $x=\frac{5}{4}$, 即 $BE=\frac{5}{4}$. 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $\tan\angle BAE=\frac{BE}{AB}=\frac{1}{4}$.

(ii) 过点 F 作 $FP\perp BC$ 于点 P . 因为四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 均为正方形, 所以 $\angle AEF=\angle ABE=\angle EPF=90^\circ, AE=EF, AB=BC=CD=5$, 所以 $\angle BAE+\angle AEB=90^\circ, \angle AEB+\angle PEF=90^\circ$, 所以 $\angle BAE=\angle PEF$, 所以 $\triangle ABE\cong\triangle EPF$, 所以 $BE=PF, AB=EP=BC$, 所以 $EP-EC=BC-EC$, 即 $PC=BE=PF$, 所以 $\triangle PCF$ 为等腰直角三角形, 所以 $\angle PCF=45^\circ$, 所以 $\angle FCH=90^\circ-\angle PCF=45^\circ$. 设 $BE=x$, 则 $CE=5-x, PC=PF=x, CF=\sqrt{2}x$. 分三种情况讨论: 当 $FH=CF$ 时, $\angle FHC=\angle FCH=45^\circ$, 所以 $\angle CFH=90^\circ$, 所以 $CH=\sqrt{2}CF=2x$, 所以 $DH=CD-CH=5-2x$, 所以 $EH=BE+DH=5-x=CE$. 在 $\text{Rt}\triangle CEH$ 中, $\angle ECH=90^\circ, EH>CE$, 所以此种情况不存在, 舍去. 当 $FH=CH$ 时, $\angle CFH=\angle FCH=45^\circ$, 所以 $\angle CHF=90^\circ=\angle BCD$, 所以 $AH\parallel BC$, 此时点 H 与点 D 重合, 点 E 与点 C 重合, 所以 $BE=BC=5$.

当 $CH=CF=\sqrt{2}x$ 时, 同理可得 $DH=5-\sqrt{2}x, EH=x+5-\sqrt{2}x$. 在 $\text{Rt}\triangle CEH$ 中, 由勾股定理, 得 $CE^2+CH^2=EH^2$, 即 $(5-x)^2+(\sqrt{2}x)^2=(x+5-\sqrt{2}x)^2$, 解得 $x=5\sqrt{2}-5$. 即 $BE=5\sqrt{2}-5$. 综上所述, 当 $FH=CH$ 时, $BE=5$; 当 $CH=CF$ 时, $BE=5\sqrt{2}-5$.

② $\frac{80}{13}$

提示: 如图, 过点 F 作 $FN\perp BC$, 交 BC 的延长线于点 N , 延长 AD , 交 FN 于点 M . 易证 $\triangle BAE\cong\triangle NEF$ (AAS), 所以 $AB=EN=5, BE=NF$. 易证四边形 $ABNM$ 和四边形 $DCNM$ 均为矩形, 所以 $MN=AB=BC=5, DM=CN$, 所以 $BE-BC=NF-MN$, 即 $CE=FM$. 设 $CE=FM=x$, 则 $DM=CN=CE+EN=5+x, AM=AD+DM=10+x$. 易证 $DH\parallel MF$, 所以 $\triangle ADH\sim\triangle AMF$, 所以 $\frac{AD}{AM}=\frac{DH}{MF}=\frac{AH}{AF}$. 因为 $AH=\frac{5}{8}FH$, 所以 $\frac{AH}{AF}=\frac{AH}{AH+FH}=\frac{5}{13}$, 所以 $\frac{5}{10+x}=\frac{5}{13}, \frac{DH}{x}=\frac{5}{13}$, 解得 $x=3, DH=\frac{15}{13}$, 所以 $CH=CD+DH=\frac{80}{13}$.



27. 解: (1) 由题得该抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{-8a}{2a}=4$. 因为 $AB=4$, 由对称性, 得点 $A(6,0), B(2,0)$, 将点 $B(2,0)$ 代入, 得 $4a-16a+10a-1=0$, 解得 $a=-\frac{1}{2}$, 所以抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-6$.

(2) 对于 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-6$, 令 $x=0$, 则 $y=-6$, 所以点 $C(0,-6)$. 由待定系数法, 得直线 AC 的函数表达式为 $y=x-6$. 设直线 l 与直线 AC 相交于点 F . 分两种情况:

①当 $0<t<6$, 即点 $E(t,0)$ 在线段 OA 上时,

易知点 $P\left(t, -\frac{1}{2}t^2 + 4t - 6\right)$, $F(t, t-6)$, 所以 $PF = -\frac{1}{2}t^2 + 4t - 6 - (t-6) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t$. 所以 $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}PF \cdot (x_A - x_C) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t^2 + 3t\right) \times 6 = -\frac{3}{2}(t-3)^2 + \frac{27}{2}$, 当 $t=3$ 时, $S_{\triangle APC}$ 有最大值, 最大值为 $\frac{27}{2}$.

②当 $6 < t \leq 8$, 即点 E 在点 A 右边的 x 轴上时, 易知此时点 F 位于点 P 上方, 所以 $PF = t-6 - \left(-\frac{1}{2}t^2 + 4t - 6\right) = \frac{1}{2}t^2 - 3t$. 所以 $S_{\triangle APC} = S_{\triangle PFC} - S_{\triangle PFA} = \frac{1}{2}PF \cdot (x_E - x_C) - \frac{1}{2}PF \cdot (x_E - x_A) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2 - 3t\right) \times 6 = \frac{3}{2}(t-3)^2 - \frac{27}{2}$. 因为 $\frac{3}{2} > 0$, 对称轴为直线 $t=3$, 所以当 $6 < t \leq 8$ 时, $S_{\triangle APC}$ 随着 t 的增大而增大, 即当 $t=8$ 时, $S_{\triangle APC}$ 有最大值, 最大值为 24. 因为 $24 > \frac{27}{2}$, 综上所述, 当 $t=8$ 时, $\triangle APC$ 的面积有最大值, 最大值为 24.

(3) 存在, 理由如下:

对于 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$, 令 $y = -6$, 则 $-6 = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$, 解得 $x=0$ 或 $x=8$. 分情况讨论: ①当 $2 < t < 8$, 即点 P 在 CD 上方时, 如图 1. 由(1)(2)可知, 点 $O(0,0)$, $B(2,0)$, $C(0,-6)$, $P\left(t, -\frac{1}{2}t^2 + 4t - 6\right)$, $Q(t, -6)$. 所以 $OB=2$, $OC=6$, $QP = -\frac{1}{2}t^2 + 4t$, $QC=t$. 因为 $\angle BOC = 90^\circ = \angle CQP$, 所以当以 C, P, Q 为顶点的三角形与 $\triangle OBC$ 相似时, 又可分为两种情况. ①当 $\triangle OBC \sim \triangle QPC$ 时, $\frac{OB}{QP} = \frac{OC}{QC}$, 所以 $\frac{2}{-\frac{1}{2}t^2 + 4t} = \frac{6}{t}$,

即 $3t^2 - 22t = 0$, 解得 $t=0$ (舍去) 或 $t = \frac{22}{3}$;

②当 $\triangle OBC \sim \triangle QCP$ 时, $\frac{OB}{QC} = \frac{OC}{QP}$, 所以 $\frac{2}{t} = \frac{6}{-\frac{1}{2}t^2 + 4t}$, 即 $t^2 - 2t = 0$, 解得 $t=0$ (舍去) 或 $t=2$ (舍去).

②当 $t > 8$, 即点 P 在 CD 下方时, 如图 2. 此时 $QP = \frac{1}{2}t^2 - 4t$, 同理分

两种情况: ①当 $\triangle OBC \sim \triangle QPC$ 时, $\frac{OB}{QP} = \frac{OC}{QC}$, 所以 $\frac{2}{\frac{1}{2}t^2 - 4t} = \frac{6}{t}$, 即 $3t^2 - 26t = 0$, 解

得 $t=0$ (舍去) 或 $t = \frac{26}{3}$; ②当 $\triangle OBC \sim \triangle QCP$ 时, $\frac{OB}{QC} = \frac{OC}{QP}$, 所以 $\frac{2}{t} = \frac{6}{\frac{1}{2}t^2 - 4t}$, 即

$t^2 - 14t = 0$, 解得 $t=0$ (舍去) 或 $t=14$. 综上所述, 存在点 P , 使以 C, P, Q 为顶点的三角形与 $\triangle OBC$ 相似, 此时, $t = \frac{22}{3}$ 或 $t = \frac{26}{3}$ 或 $t=14$.

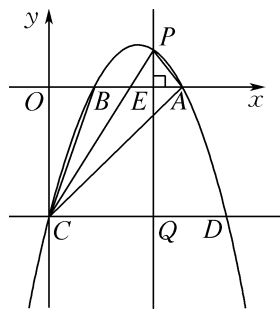


图 1

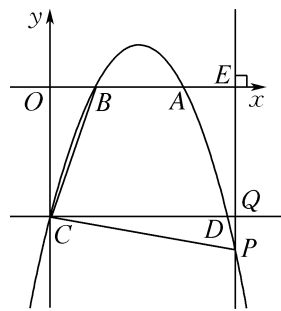


图 2

【解后反思】本题是二次函数与平面几何相结合的综合考查题, 第(1)问可根据对称性直接写出点 A, B 的坐标, 进而求得表达式; 后面两问均考查了分类讨论的数学思想, 当动点 E 在运动时, 点 P 的位置也随之改变, 从而影响了几何数量的表达式. 第(2)问中点 P 或在直线 AB 上方, 或在下方, 而第(3)问中点 P 或在直线 CD 上方, 或在下方, 而且出现了“相似三角形的对应顶点”这一条件, 所以只有通过多层次分类讨论, 才能得到完整的答案.

D28* 无锡市 2024 年中考模拟优化卷

1. C 2. B 3. D 4. B 5. D 6. B 7. D

8. B

9. D 提示: 由条件, 得 $BC = AC \cdot \tan A = 3\sqrt{3}$, $AB = 2BC = 6\sqrt{3}$, $BD = AD = BC = 3\sqrt{3}$. 因为四边形 $DFBE$ 为菱形, 所以 $DE = DF = BF = 3$, $EF \perp BD$, $OB = OD = \frac{1}{2}BD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 由 $\cos \angle ODF = \frac{OD}{DF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $\angle ODF = 30^\circ$. 所以 $\angle OBF = \angle ODF = 30^\circ$. 当 BF 所在直线经过点 A , 分情况讨论: ① 当 B', F, A 三点依次共线时, 如图 1, 连接 OA , 过点 O 作 $OG \perp AB$ 于点 G . 由旋转的性质, 得 $B'D = BD = AD$, 所以 $\angle OB'F = \angle DAF = 30^\circ$. 由外角的性质, 得 $\angle AFD = \angle OB'F + \angle ODF = 60^\circ$, 所以 $\angle BDF = \angle DAF + \angle AFD = 90^\circ$. 所以 $\angle ODG = \angle BDF - \angle ODF = 60^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle ODG$ 中, $DG = OD \cdot \cos \angle ODG = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $OG = OD \cdot \sin \angle ODG = \frac{9}{4}$, 所以 $AG = AD + DG = \frac{15\sqrt{3}}{4}$. 在 $\text{Rt}\triangle OAG$ 中, 由勾股定理, 得 $OA = \sqrt{AG^2 + OG^2} = \frac{3\sqrt{21}}{2}$. ② 当点 B' 与点 A 重合时, 如图 2, 此时 $OA = OB' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

综上所述, 点 A 与菱形对角线的交点 O 之间的距离为 $\frac{3\sqrt{21}}{2}$ 或 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

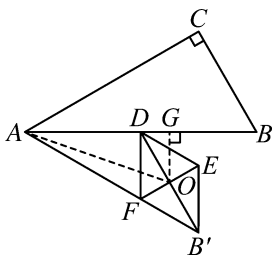


图 1

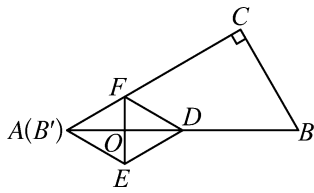


图 2

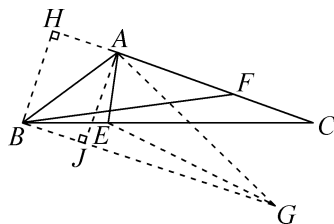
【解后反思】结合条件, 根据菱形的性质和特殊角的三角函数值, 可推出相关角的度数. 在旋转中观察, 可发现“ BF 所在直线经过点 A ”应分两种情况讨论: 一是当 $DF \perp AB$ 时, BF 所在直线经过点 A ; 二是当点 A 与点 B' 重合时, BF 所在直线经过点 A , 因此分类讨论思想是解题的关键. 构造直角三角形, 运用勾股定理求线段长是常规解题路径.

10. B 提示: 如图, 过点 B 作 $BG \parallel AC$, 且使得 $BG = BC$. 连接 EG, AG . 过点 A 作 $AJ \perp BG$ 于点 J , 过点 B 作 $BH \perp CA$, 交 CA 的延长线于点 H . 易证 $\triangle BCF \cong \triangle GBE$ (SAS), 所以 $BF = GE$, 所以 $AE + BF = AE +$

$GE \geq AG$. 因为 A, G 为定点, 所以 AG 为定长线段, 当 A, E, G 三点共线时, $AE + BF$ 有最小值, 最小值为 AG 的长. 易证四边形 $AHBJ$ 是矩形, 所以 $BH = AJ$, $AH = BJ$. 设 $AH = BJ = x$, $BH = AJ = y$, 则 $CH = x + 5$. 由勾股定理, 得 $\begin{cases} AH^2 + BH^2 = AB^2, \\ BH^2 + CH^2 = BC^2, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2, \\ y^2 + (x+5)^2 = 7^2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ y = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \text{ 所以 } AH = BJ = \frac{3}{2}, BH = AJ = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } JG = BG - BJ = 7 - \frac{3}{2} = \frac{11}{2}.$$

由勾股定理, 得 $AG = \sqrt{AJ^2 + JG^2} = \sqrt{37}$, 所以 $AE + BF$ 的最小值为 $\sqrt{37}$.



【解后反思】本题中将 $AE + BF$ 转化为含有公共端点的两条线段之和是解题基本路径. 基于此种思路, 结合 $BE = CF$ 可在点 E 处利用全等三角形构造一条线段等于 BF , 从而根据三角形的三边关系将求 $AE + BF$ 的最小值转化为求线段 AG 的长. 而如何求 AG 的长是难点, 要整合已知的 AB, AC, BC 及 $BG \parallel AC$, 构造矩形 $AHBJ$ 和 $\text{Rt}\triangle BHA, \text{Rt}\triangle BHC, \text{Rt}\triangle AJG$, 利用勾股定理, 建立方程解决问题是基本策略.

11. $(m+2)(m-2)$ 12. 2.66×10^5

13. -1 14. $(4\sqrt{2} + 36)\pi$

15. $\frac{\sqrt{26}}{2} - \frac{13\pi}{16} - \frac{13}{8}$ 提示: 连接 AD, BD, DE . 由题图

可知, $\angle BCD = 90^\circ$, 所以 BD 为直径, 所以 $\angle BED = 90^\circ$. 设 BD 的中点为 O , 连接 OE . 由勾股定理, 得 $BD = AD = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $AB = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$, 所以 $\triangle ABD$ 为等腰直角三角形. 因为 $\angle BED = 90^\circ$, 即 $DE \perp AB$, 所以 $AE = BE = DE = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$. 又因

为 $OB = OD = OE = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, 所以 $OE \perp BD$, 即

$$\angle BOE = 90^\circ, \text{ 所以 } S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形BOE}} - S_{\triangle OBE} = \frac{1}{4}\pi \times$$

$$\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{13\pi}{16} - \frac{13}{8}.$$

16. $3\sqrt{5}$ 提示:过点 A' 作 $A'C \perp x$ 轴于点 C ,过点 B' 作 $B'D \perp x$ 轴于点 D ,则 $\angle A'CO = \angle ODB' = 90^\circ$. 由条件,得 $OA = 3, OB = OA \cdot \tan \angle BAO = 3\sqrt{3}$. 由旋转的性质,得 $OB' = OB = 3\sqrt{3}, OA' = OA = 3, \angle A'OB' = 90^\circ$,点 B' 在第一象限. 易证 $\triangle A'CO \sim \triangle ODB'$,所以 $\frac{A'C}{OD} = \frac{OC}{B'D} = \frac{OA'}{B'O} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 因为点 B' 的坐标是 (m, n) ,且在第一象限,所以 $OD = m, B'D = n$,所以 $A'C = \frac{\sqrt{3}}{3} OD = \frac{\sqrt{3}}{3} m, OC = \frac{\sqrt{3}}{3} B'D = \frac{\sqrt{3}}{3} n$. 因为点 A' 在函数 $y = -\frac{3}{x} (x < 0)$ 的图像上,所以点 $A'(-\frac{\sqrt{3}}{3} n, \frac{\sqrt{3}}{3} m)$,且 $-\frac{\sqrt{3}}{3} n \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} m = -3$,所以 $mn = 9$. 因为 $m^2 + n^2 = (3\sqrt{3})^2 = 27$,所以 $(m+n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn = 45$,所以 $m+n = 3\sqrt{5}$ (负值已舍).

17. $m < \frac{1}{2}$ 或 $m > 3$ 提示:根据题意,得该抛物线的对称轴是直线 $x = \frac{-2+6}{2} = 2$. 又因为抛物线开口向上,所以图像上越靠近对称轴的点,其纵坐标越小. 因为 $n_1 < n_2$,所以 $|m+4-2| < |3m-2-2|$,即 $|m+2| < |3m-4|$. 分情况讨论:①当 $m < -2$ 时, $-m-2 < 4-3m$,解得 $m < 3$,所以 $m < -2$;②当 $-2 \leq m \leq \frac{4}{3}$ 时, $m+2 < 4-3m$,解得 $m < \frac{1}{2}$,所以 $-2 \leq m < \frac{1}{2}$;③当 $m > \frac{4}{3}$ 时, $m+2 < 3m-4$,解得 $m > 3$. 综上所述, $m < \frac{1}{2}$ 或 $m > 3$.

【解后反思】数形结合是解决二次函数图像问题的有力工具. 依据对称性找到抛物线的对称轴,结合二次函数的图像开口向上,画出图像草图,观察图像可以发现,越靠近对称轴,函数值越小. 由条件 $n_1 < n_2$,可得 $|m+2| < |3m-4|$,据此分三种情况:① $m < -2$;② $-2 \leq m \leq \frac{4}{3}$;③ $m > \frac{4}{3}$,去绝对值符号计算即可.

18. $4 + \sqrt{10}$ 提示:如图 1,作 $\angle BAM = 45^\circ$,过点 O 作 $ON \perp AM$ 于点 N ,延长 NO 交 $\odot O$ 于点 G ,过点 G 作 $HK \perp GN$,垂足为点 K ,过点 G 作 $GQ \perp AB$ 于点 Q ,延长 GQ 交 AM 于点 F ,当点 D 与点 G 重合,点 E 在点 Q 处时, $AE + DE$ 取得最大值. 理由如下:

连接 OA ,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,由 $\tan \angle CAB = \frac{BC}{AC} = 2$,

$AC = \sqrt{5}$,得 $BC = 2\sqrt{5}$. 所以 $OC = \frac{1}{2} BC = \sqrt{5}$,所以 $OC = AC$,所以 $\angle OAC = 45^\circ$. 所以 $\angle OAC + \angle OAB = \angle BAN + \angle OAB$,即 $\angle CAB = \angle OAN$. 所以 $\tan \angle OAN = \frac{ON}{AN} = 2$,所以 $ON = 2AN$. 由勾股定理,得 $AN^2 + ON^2 = OA^2 = OC^2 + AC^2$,即 $AN^2 + (2AN)^2 = 10$,所以 $AN = \sqrt{2}$ (负值已舍),所以 $ON = 2\sqrt{2}$. 因为 $GO = OC = \sqrt{5}$,所以 $GN = GO + ON = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$. 在 $\odot O$ 上取不同于点 G 的一点 P ,过点 P 作 $PY \perp AM$ 于点 Y ,过点 P 作 $PJ \perp AB$ 所在的直线于点 J ,并延长 PJ 分别交 AM, KH 于点 R, I . 因为 $\tan \angle BAN = \frac{QF}{AQ} = 1, \tan \angle BAN = \frac{JR}{AJ} = 1$,所以 $QF = AQ, JR = AJ$. 则 $AE + DE = AQ + GQ = FQ + GQ = GF$ 或 $AE + DE = AJ + PJ = JR + PJ = PR$. 易证四边形 $IRFG$ 为平行四边形,所以 $GF = IR > PR$. 所以当 D 在点 G 处时, $AE + DE$ 取得最大值,最大值为 GF 的长. 因为 $\angle QFA = 90^\circ - \angle EAF = 45^\circ$,所以 $\sin \angle QFA = \frac{GN}{GF} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 所以 $GF = \sqrt{2} GN = \sqrt{2} (\sqrt{5} + 2\sqrt{2}) = 4 + \sqrt{10}$,所以 $AE + DE$ 的最大值为 $4 + \sqrt{10}$.

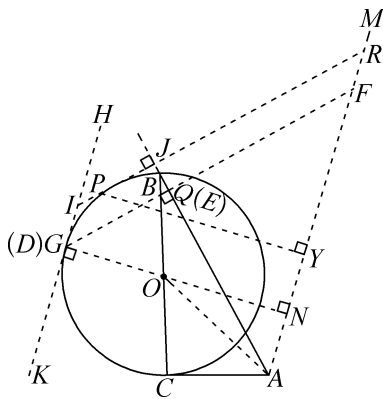


图 1

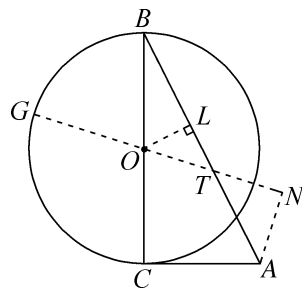


图 2

【解后反思】要善于运用转化思想解决问题. 本题通过构造等腰直角三角形将 AE 转化为 EF ,且 EF, DE 在同一直线上,问题转化为求 DF 长的最大值,由点 D 在圆上运动,而点 E 位置的改变, DF 始终在平移,其中点 F 在直线 AM 上移动,且 $\angle MAE = 45^\circ$. 由图可证,当点 D 与点 G 重合时, DF 取得最大值. 根据条件可知 $GF = \sqrt{2} GN$,那么如何求 GN ? 除了提示中的解法外,也可在如图 2 所示的两个相似三角形 BOL 和 BAC ,以及等腰直角三角形 TOL 和等腰直角三角形 TNA 中解决.

19. 解:(1) 原式 $= 1 - 3 + \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = -2 + \sqrt{2}$.

$$(2) \text{ 原式} = 2(x^2 - 9) - (1 - 2x + x^2) = 2x^2 - 18 - 1 + 2x - x^2 = x^2 + 2x - 19.$$

20. 解: (1) 因为根的判别式为 $(-4)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 24 > 0$, 所以 $x_1 = \frac{2+\sqrt{6}}{2}, x_2 = \frac{2-\sqrt{6}}{2}$.

(2) 解 $x - 3 < 2x$, 得 $x > -3$, 解 $\frac{x+1}{3} \geq \frac{x-1}{2}$, 得 $x \leq 5$, 所以原不等式组的解集为 $-3 < x \leq 5$.

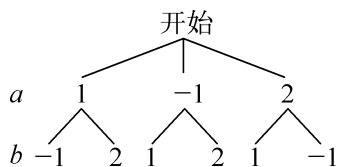
21. 证明: (1) 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 $AB = CD, AB \parallel CD$, 所以 $\angle ABE = \angle CDF$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中, $\begin{cases} AB = CD, \\ \angle ABE = \angle CDF, \\ BE = DF, \end{cases}$ 所

以 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ (SAS).

(2) 由 (1) 可知, $\triangle ABE \cong \triangle CDF$, 所以 $AE = CF, \angle AEB = \angle CFD$. 因为 $\angle AEB + \angle AEF = \angle CFD + \angle CFE = 180^\circ$, 所以 $\angle AEF = \angle CFE$. 所以 $AE \parallel CF$, 所以四边形 $AECF$ 为平行四边形. 又因为 $\angle AEC = 90^\circ$, 所以 $\square AECF$ 为矩形.

22. 解: (1) 画树状图如下:



由图可知, 共有 6 种等可能的结果, 其中恰好在函数 $y = -x + 3$ 的图像上的有 $(1, 2), (2, 1)$, 共 2 种, 所以所求概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

(2) $\frac{2(n+1)}{(n+3)(n+2)}$ 提示: 再增加 $n(n \geq 1)$ 张都

标有数字 1 的卡片, 共有 $(n+3)$ 张卡片, 按照题目中的抽取方式, 共有 $(n+3)(n+2)$ 种等可能的结果, 其中点 $A(a, b)$ 恰好在函数 $y = -x + 3$ 的图像上的结果有 $2(n+1)$ 种, 所以所求概率为 $\frac{2(n+1)}{(n+3)(n+2)}$.

23. 解: (1) ②④①③ (2) D

(3) ①选择工程教育的人数为 $40 - 16 - 4 =$

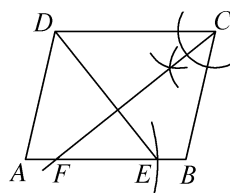
$12 = 8$, 补全的条形统计图略.

②估计该校八年级选择工程教育的人数为 $800 \times \frac{8}{40} = 160$, 所以 $\frac{160}{40} = 4$ (个).

答: 估计该校八年级至少应该开设 4 个工程教育班.

24. 解: (1) ①如图所示, 点 E 即为所求.

②如图所示, 射线 CF 即为所求.



(2) 因为 $\angle ADE = \angle AED$, 所以 $AD = AE$. 因为 CF 为 $\angle BCD$ 的平分线, 所以 $\angle DCF = \angle BCF$. 因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 所以 $CD = AB = 6, AD = BC = 5, AB \parallel CD$, 所以 $\angle DCF = \angle BFC$. 所以 $\angle BCF = \angle BFC$, 所以 $BF = BC$. 所以 $AE = BF = 5$, 所以 $AF = AB - BF = 1, EF = AE - AF = 4$. 在 $\text{Rt} \triangle ADF$ 中, 由勾股定理, 得 $DF = \sqrt{AD^2 - AF^2} = 2\sqrt{6}$. 在 $\text{Rt} \triangle DEF$ 中, 由勾股定理, 得 $DE = \sqrt{DF^2 + EF^2} = 2\sqrt{10}$. 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\triangle EFP \sim \triangle DCP$, 所以 $\frac{EF}{DC} =$

$$\frac{PE}{PD}, \text{ 即 } \frac{4}{6} = \frac{PE}{2\sqrt{10} - PE}, \text{ 所以 } PE = \frac{4\sqrt{10}}{5}.$$

25. 解: (1) 当 $x = 30$ 时, 日销售量 $y = x + 20 = 50$, 日销售价为 $60 - 0.5x = 45$ (元/件), $50 \times (45 - 30) = 750$ (元).

答: 第 30 天的销售利润为 750 元.

(2) 设日销售利润为 W 元. 当 $1 \leq x \leq 40$ 时, $W = (x + 20)(60 - 0.5x - 30) = -0.5x^2 + 20x + 600 = -0.5(x - 20)^2 + 800$, 因为 $-0.5 < 0$, 所以当 $x = 20$ 时, W 最大, 最大值为 800; 当 $41 \leq x \leq 60$ 时, $W = \left(-\frac{1}{2}x + 80\right) \cdot (40 - 30) = -5x + 800$, 因为 $-5 < 0$, y 为整数, 所以当 $x = 41$ 时, W 最大, 最大值为

$-5 \times 41 + 800 = 595$. 因为 $800 > 595$, 所以该商品在第 20 天的日销售利润最大, 最大日销售利润是 800 元.

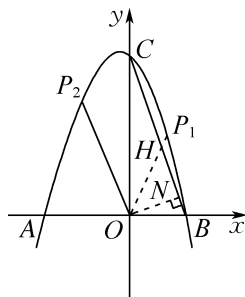
26. (1) 证明: 连接 OC . 因为 AB 为 $\odot O$ 的直径, 所以 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以 $\angle A + \angle ABC = 90^\circ$. 因为 $OB = OC$, 所以 $\angle ABC = \angle BCO$. 又因为 $\angle BCD = \angle A$, 所以 $\angle BCD + \angle BCO = 90^\circ$, 即 $\angle DCO = 90^\circ$, 所以 $OC \perp CD$. 因为 OC 是 $\odot O$ 的半径, 所以 CD 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 解: 连接 OE . 过点 C 作 $CM \perp AB$ 于点 M , 过点 E 作 $EH \perp AB$ 于点 H , 则 $CM \parallel EH$. 由条件, 得 $OE = \sqrt{10}$, $AB = 2\sqrt{10}$. 因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CM = 3\sqrt{10}$, 即 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \cdot CM = 3\sqrt{10}$, 所以 $CM = 3$. 因为 $\angle BCM + \angle ABC = 90^\circ$, $\angle A + \angle ABC = 90^\circ$, 所以 $\angle BCM = \angle A$. 所以 $\tan \angle BCM = \tan A$, 所以 $\frac{BM}{CM} = \frac{CM}{AM}$, 即 $\frac{BM}{3} = \frac{3}{2\sqrt{10} - BM}$, 所以 $BM = \sqrt{10} - 1$ 或 $BM = \sqrt{10} + 1$ (舍去). 因为 $CM \parallel EH$, 所以 $\triangle HEF \sim \triangle MCF$. 所以 $\frac{HE}{MC} = \frac{HF}{MF} = \frac{EF}{CF} = \frac{1}{3}$, 所以 $HE = \frac{1}{3} MC = 1$, $MF = 3HF$. 在 $\text{Rt}\triangle OEH$ 中, 由勾股定理, 得 $OH = \sqrt{OE^2 - HE^2} = 3$. 所以 $AH = OA - OH = \sqrt{10} - 3$. 因为 $AB = BM + MF + HF + AH = 2\sqrt{10}$, 即 $\sqrt{10} - 1 + 3HF + HF + \sqrt{10} - 3 = 2\sqrt{10}$. 所以 $HF = 1$, 所以 $MF = 3$, 所以 $BF = BM + MF = \sqrt{10} - 1 + 3 = \sqrt{10} + 2$.

27. 解: (1) 对于二次函数 $y = mx^2 + mx - 6m$ ($m \neq 0$), 令 $y = 0$, 则 $x^2 + x - 6 = 0$, 解得 $x_1 = 2$, $x_2 = -3$; 令 $x = 0$, 则 $y = -6m$. 所以点 A, B, C 的坐标分别为 $(-3, 0), (2, 0), (0, -6m)$. 将点 $A(-3, 0)$ 代入 $y = 2x + n$, 得 $0 = -6 + n$, 解得 $n = 6$, 所以一次函数的表达式为 $y =$

$2x + 6$. 将点 $C(0, -6m)$ 代入 $y = 2x + 6$, 得 $-6m = 6$, 解得 $m = -1$.

(2) 存在, 如图, 当点 P 位于 y 轴右侧的抛物线上时, 设 OP_1 交 BC 于点 H , 过点 O 作 $ON \perp BC$ 于点 N , 则 $\angle OHN = \angle P_1OC + \angle BCO = 45^\circ$. 所以 $\triangle ONH$ 为等腰直角三角形, 所以 $OH = \sqrt{2} ON$. 由 (1) 可知, 二次函数的表达式为 $y = -x^2 - x + 6$, 且 $OB = 2$, $OC = 6$. 在 $\text{Rt}\triangle OBC$ 中, 由勾股定理, 得 $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 2\sqrt{10}$. 所以 $\sin \angle OCB = \frac{OB}{BC} = \frac{\sqrt{10}}{10}$. 在 $\text{Rt}\triangle OCN$ 中, $ON = OC \cdot \sin \angle OCB = \frac{3\sqrt{10}}{5}$, 所以 $OH = \sqrt{2} ON = \frac{6\sqrt{5}}{5}$. 由待定系数法, 得直线 BC 的函数表达式为 $y = -3x + 6$. 设点 $H(m, -3m + 6)$ ($0 < m < 2$), 则 $OH^2 = m^2 + (-3m + 6)^2 = \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2$, 解得 $m_1 = \frac{6}{5}, m_2 = \frac{12}{5}$ (舍去), 所以点 $H\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$. 由待定系数法, 得直线 $OH(OP_1)$ 的函数表达式为 $y = 2x$. 令 $2x = -x^2 - x + 6$, 解得 $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}$ (舍去). 所以 $P_1\left(\frac{-3 + \sqrt{33}}{2}, \sqrt{33} - 3\right)$. 当点 P 位于 y 轴左侧的抛物线上时, 因为 $\angle P_1OC = \angle P_2OC$, 所以直线 OP_1 和直线 OP_2 关于 y 轴对称, 易求直线 OP_2 的函数表达式为 $y = -2x$. 令 $-2x = -x^2 - x + 6$, 解得 $x_1 = -2, x_2 = 3$ (舍去), 所以 $P_2(-2, 4)$. 综上所述, 点 P 的坐标为 $(-2, 4)$ 或 $\left(\frac{\sqrt{33} - 3}{2}, \sqrt{33} - 3\right)$.



【解后反思】如何利用问题(2)中的点P满足的条件“ $\angle POC + \angle BCO = 45^\circ$ ”? 这是解题关键. 常规思路是构造等腰直角三角形, 将 $\angle POC$ 或 $\angle BCO$ 设计成一个不相邻的外角, 通过作垂线, 即可转化出两个 45° 等角. 思维要缜密周全, 根据对称性, 点P存在另外一种情况, 可详细求出其中相关的一个, 另一个用对称性(注意不是点 P_1 和点 P_2 , 而是直线 OP_1 和直线 OP_2 关于y轴对称)直接求出.

28. 解: (1) 过点D作 $DG \perp EM$ 于点G. 因为 $DE = DM$, $DG \perp EM$, 所以G是EM的中点. 由折叠的性质, 得 $\angle E = \angle A$, $EM = AM$, 所以 $\tan E = \tan A = \frac{4}{3}$. 设 $DG = 4k$, $EG = 3k$, 则 $DE = \sqrt{DG^2 + EG^2} = 5k = DM$, $EM = 2EG = 6k = AM$, 所以 $\frac{DM}{AM} = \frac{5}{6}$.

(2) 分三种情况: ①如图1, 当 $\angle EMD = 90^\circ$ 时, 延长AD, NF交于点H. 因为 $EM \parallel FN$, $DH \parallel CN$, 所以 $\angle EMD = \angle H = \angle FNC = 90^\circ$. 由折叠的性质, 得 $EF = AB$, $EM = AM$, $FN = BN$, $\angle E = \angle A$, 所以 $\tan E = \tan A = \frac{4}{3}$.

设 $DM = 4k$, $EM = 3k$, 则 $DE = 5k$, $AM = 3k$. 所以 $\sin A = \sin E = \frac{DM}{DE} = \frac{4}{5}$, $AD = AM + DM = 7k$, 所以 $EF = AB = AD = BC = 7k$, 所以 $DF = EF - DE = 2k$. 因为 $\angle EMD = \angle H$, $\angle EDM = \angle FDH$, 所以 $\triangle DEM \sim \triangle DFH$. 所以 $\frac{FH}{EM} = \frac{DF}{DE}$, 即 $\frac{FH}{3k} = \frac{2k}{5k}$, 所以 $FH = \frac{6}{5}k$. 由题可知, 菱形

ABCD的高 $NH = AB \cdot \sin A = \frac{28}{5}k$, 所以 $BN = FN = NH - FH = \frac{22}{5}k$. 所以 $CN = BC - BN = \frac{13}{5}k$, 所以 $\frac{BN}{CN} = \frac{22}{13}$.

②如图2, 当 $\angle MDE = 90^\circ$ 时, 延长EF交BC于点H, 则 $\angle FHN = 90^\circ$. 由折叠的性质, 得 $\angle E = \angle A$, $EM = AM$, 所以 $\tan E =$

$\tan A = \frac{4}{3}$. 设 $DM = 4k$, $DE = 3k$, 则 $EM = 5k = AM$, 所以 $\sin A = \sin E = \frac{DM}{EM} = \frac{4}{5}$, $AD = AM + DM = 9k$, 所以 $EF = AB = AD = BC = 9k$, $DF = EF - DE = 6k$. 同理, 菱形ABCD的高 $DH = AB \cdot \sin A = \frac{36}{5}k$, 所以 $FH = DH - DF = \frac{6}{5}k$. 同理可证

$\triangle DEM \sim \triangle HFN$, 所以 $\frac{FN}{EM} = \frac{FH}{ED}$, 即 $\frac{FN}{5k} = \frac{\frac{6}{5}k}{3k}$, 所以 $FN = 2k = BN$, 所以 $CN = BC - BN = 7k$, 所以 $\frac{BN}{CN} = \frac{2}{7}$.

③当 $\angle E = 90^\circ$ 时, 不合题意.

综上所述, $\frac{BN}{CN}$ 的值为 $\frac{22}{13}$ 或 $\frac{2}{7}$.

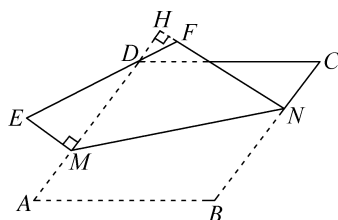


图1

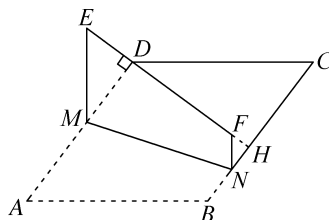


图2

【解后反思】在图形的折叠变换中, 一定存在全等图形, 要充分挖掘相等的角与相等的边, 而等腰三角形常需要作底边上的高, 进一步利用三线合一得到线段或角之间的等量关系. 问题(2)中 $\triangle DEM$ 是直角三角形, 由于没有指明直角, 故需要分类讨论. 解题的难点在于作辅助线构造相似三角形, 再利用相似三角形的对应边成比例求得线段的长.

D29 常州市 2024 年中考模拟优化卷

1. C 2. D 3. A 4. A 5. D 6. B

7. B 提示: 联立 $\begin{cases} y = x + n, \\ y = mx + 3n, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \frac{2n}{1-m}, \\ y = \frac{3n-mn}{1-m}, \end{cases}$ 即点

A 的坐标为 $(\frac{2n}{1-m}, \frac{3n-mn}{1-m})$. 由 $x = \frac{2n}{1-m}$, 得 $\frac{x}{2} = \frac{n}{1-m}$. 所以 $y = \frac{3n-mn}{1-m} = \frac{n(3-m)}{1-m} = \frac{x}{2}(3-m) =$

$\frac{3-m}{2}x$. 当 $m=3$ 时, $x=-n, y=0$, 所以点 $A(-n,$

$0)$ 到直线 $y=\frac{3}{4}x-3$ 的距离随着 n 值的变化而变化,

不合题意; 当 $m \neq 3$ 时, 点 $A(\frac{2n}{1-m}, \frac{3n-mn}{1-m})$ 在直线

$y=\frac{3-m}{2}x$ 上. 因为点 A 到直线 $y=\frac{3}{4}x-3$ 的距离总

是一个定值, 所以直线 $y=\frac{3-m}{2}x$ 与直线 $y=\frac{3}{4}x-3$

平行, 即 $\frac{3-m}{2}=\frac{3}{4}$, 解得 $m=\frac{3}{2}$.

8. A 提示: 由题图像, 得圆柱形容器的高为 14 cm, 两个实心圆柱组成的几何体的高度为 11 cm, 水从刚满过由两个实心圆柱组成的“几何体”到注满所需时间为 $42-24=18(s)$, 这段时间内水面高度变化为 $14-11=3(cm)$. 设匀速注水的水流速度为 $x \text{ cm}^3/s$, 则 $18x=30 \times 3$, 解得 $x=5$. 由题图像可知, 几何体下方圆柱的高为 $a \text{ cm}$, 则 $a \cdot (30-15)=18 \times 5$, 解得 $a=6$. 设几何体上方圆柱的底面积为 $S \text{ cm}^2$, 则 $(11-6) \times (30-S)=5 \times (24-18)$, 解得 $S=24$, 所以几何体上方圆柱的底面积为 24 cm^2 .

【解后反思】 本题考查了非连续文本的阅读, 关键是读懂图 1 和图 2 的关系, 难点是把分段函数图像中自变量与对应的函数值转化为实际问题中的数量关系, 然后运用方程的思想解决实际问题. 根据图像, 分三个部分: 满过几何体下方圆柱需 18 s, 满过几何体上方圆柱需 6 s, 注满几何体上面的空圆柱形容器需 18 s, 解题关键是看到水的体积与几何体的容积相等, 学生不易想到设匀速注水的水流速度为 $x \text{ cm}^3/s$, 根据圆柱的体积公式列方程可得匀速注水的水流速度.

9. $(0, -3)$ 10. 5.35×10^6 11. $y(x+2)(x-2)$ 12. 46 13. $m > 5$

14. π 提示: 由旋转得 $AE=AB=6$, 因为四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $AD=BC=\frac{1}{2}AB=3$, $\angle D=90^\circ, AB \parallel CD$. 因为 $\sin \angle AED = \frac{AD}{AE} = \frac{1}{2}$, 所以 $\angle AED = \angle EAB = 30^\circ$, 所以 $\widehat{BE}$ 的长 = $\frac{30\pi \times 6}{180} = \pi$.

15. $\frac{4\sqrt{5}+5}{5}$ 提示: 因为 $a^2-b^2=4ab$, 所以 $a^2-4ab=b^2$, 所以 $(a-2b)^2=5b^2$, 所以 $a-2b=\pm\sqrt{5}b$, 所以 $a=\pm\sqrt{5}b+2b$. 因为 $a>0, b>0$, 所以 $a=(2+\sqrt{5})b$,

所以 $\frac{a+2b}{a-2b} = \frac{(2+\sqrt{5})b+2b}{(2+\sqrt{5})b-2b} = \frac{4\sqrt{5}+5}{5}$.

16. $\frac{10}{3}$ 提示: 因为四边形 $ABCD$ 为矩形, 所以 $AD \parallel$

$BC, OA=OC$. 所以 $S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}S_{\text{矩形}ABCD} =$

5. 因为 E 为边 BC 的中点, 所以 $BE=CE=\frac{1}{2}BC=$

$\frac{1}{2}AD, S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}S_{\triangle BCD} = \frac{1}{4}S_{\text{矩形}ABCD} = 5$. 因为 $AD \parallel$

BC , 所以 $\triangle CEF \sim \triangle ADF$, 所以 $\frac{EF}{DF} = \frac{CE}{AD} = \frac{1}{2}$, 所以

$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CDF}} = \frac{EF}{DF} = \frac{1}{2}$, 所以 $S_{\triangle CEF} = \frac{1}{3}S_{\triangle CDE} = \frac{5}{3}$. 所以

$S_{\text{四边形}OBEF} = S_{\triangle OBC} - S_{\triangle CEF} = \frac{10}{3}$.

17. 20.8% 提示: 设产品 A, B 的成本分别为 a 元/件,

b 元/件. 由题意, 得 $\frac{16\% \times 3a + 24\% \times 2b}{3a + 2b} = 18\%$, 解

得 $a=2b$. 所以当销售量的比为 1:3 时, 总获利为

$\frac{16\%a + 24\% \times 3b}{a + 3b} = \frac{16\% \times 2b + 24\% \times 3b}{2b + 3b} = 20.8\%$.

【解后反思】 本题考查了利润、成本及利润率的关系, 难点在于设出辅助未知数, 根据“销售量的比为 3:2 时, 总获利为 18%”及利润率公式, 寻找出 a 与 b 的数量关系, 进而求出销售量的比为 1:3 时的总获利.

18. $6-3\sqrt{3}$ 提示: 设 $\odot O$ 与边 BC 切于点 G , 连接 GO ,

并延长交直线 BE 于点 H , 连接 OE , 则 $GH \perp BC$,

$OE \perp BH$. 因为 $\triangle ABE$ 为等边三角形, 所以 $\angle ABE =$

$60^\circ, BE=AB=3$. 所以 $\angle HBG = \angle ABC - \angle ABE =$

$30^\circ, \angle BHG = 90^\circ - \angle HBG = 60^\circ$. 由切线长定理, 得

$BG=BE=3$. 设 $\odot O$ 的半径为 r , 则 $OE=OG=r$. 在

$\text{Rt} \triangle OEH$ 中, 由 $\sin \angle BHG = \frac{OE}{OH}$, 得 $OH =$

$\frac{OE}{\sin \angle BHG} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$. 在 $\text{Rt} \triangle BHG$ 中, 由 $\tan \angle HBG =$

$\frac{HG}{BG}$, 得 $HG = BG \cdot \tan \angle HBG = \sqrt{3}$. 因为 $HG =$

$OH + OG$, 即 $\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r + r$, 解得 $r = 6 - 3\sqrt{3}$.

【解后反思】 本题的难点在于辅助线的添加, 连接圆心 O 和切点 E, G 是圆中常见的辅助线, 关键是怎么想到要延长 GO 交直线 BE 于点 H , 这是基于 $\angle HBG = 30^\circ$, 延长后就能构造出含 30° 角的 $\text{Rt} \triangle BHG$ 和 $\text{Rt} \triangle OEH$, 再根据“求什么就设什么”的想法, 设出 $\odot O$ 的半径为 r , 运用锐角三角函数或者勾股定理建立含有 r 的方程, 解之即

可. 解题时, 容易误认为 B, E, D 三点共线, 可用反证法证明. 假设 B, E, D 三点共线, 由切线长定理, 得 $BD = 6 - r$, 而 $CD = 3$, 这与定理“在直角三角形中, 30° 角所对的直角边是斜边的一半”矛盾, 故 B, E, D 三点不共线.

19. 解: (1) 原式 $= 2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 1 = 1 - 4\sqrt{3}$.

(2) 原式 $= 9x^2 - 6xy + y^2 - (9x^2 - 4y^2) = 9x^2 - 6xy + y^2 - 9x^2 + 4y^2 = 5y^2 - 6xy$.

20. 解: (1) $\frac{1}{x-1} + 1 = \frac{3}{2(x-1)}$. 方程两边同时乘以 $2(x-1)$, 得 $2 + 2x - 2 = 3$. 解这个方程, 得 $x = \frac{3}{2}$. 经检验, $x = \frac{3}{2}$ 是原方程的解.

(2) 解 $2x + 1 > 0$, 得 $x > -\frac{1}{2}$. 解 $\frac{x-1}{3} > x - 1$, 得 $x < 1$. 所以原不等式组的解集是 $-\frac{1}{2} < x < 1$.

21. (1) 75 (2) 7 (3) 79 分

(4) 解: $1\ 200 \times \frac{9}{30} = 360$ (名).

答: 估计两次活动平均成绩不低于 90 分的学生有 360 名.

22. (1) $\frac{1}{2}$

(2) 解: 列表如下:

坐标	-1	2	1	-3
-1	——	(2, -1)	(1, -1)	(-3, -1)
2	(-1, 2)	——	(1, 2)	(-3, 2)
1	(-1, 1)	(2, 1)	——	(-3, 1)
-3	(-1, -3)	(2, -3)	(1, -3)	——

由表可知, 点 M 的坐标共有 12 种等可能的情况, 其中位于第二象限的情况有 4 种, 分别是 $(-1, 2), (-3, 2), (-1, 1), (-3, 1)$, 所以所求概率为 $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

23. (1) $\frac{60}{m}$

(2) 解: ①由题意, 得 $\frac{320}{m} - \frac{60}{m} = 0.52$, 解得 $m = 500$. 经检验, $m = 500$ 是原方程的解. 所

以 $\frac{320}{m} = 0.64, \frac{60}{m} = 0.12$.

答: 燃油车的每千米行驶费用为 0.64 元, 新能源车每千米的行驶费用为 0.12 元.

②设每年行驶 x km, 买新能源车的年费用更低. 由题意, 得 $5\ 000 + 0.64x > 7\ 600 + 0.12x$. 解得 $x > 5\ 000$.

答: 每年行驶超过 5 000 km, 买新能源车的年费用更低.

24. 解: (1) 分别过点 A, B 作 $AE \perp x$ 轴于点 E , $BD \perp x$ 轴于点 D . 因为反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 的图像经过点 $B(-2, a)$, 所以 $-2a = -2$, 解得 $a = 1$, 所以 $BD = 1, OD = 2$. 因为 $\angle AOB = 90^\circ$, 所以 $\angle AOE + \angle BOD = 90^\circ$. 又因为 $\angle AOE + \angle OAE = 90^\circ$, 所以 $\angle BOD = \angle OAE$. 又因为 $\angle BDO = \angle OEA = 90^\circ$, 所以 $\triangle BOD \sim \triangle OAE$, 所以 $\frac{BD}{OE} = \frac{OD}{AE} = \frac{OB}{AO} = \tan \angle BAO = \frac{1}{2}$, 所以 $OE = 2BD = 2, AE = 2OD = 4$, 所以点 A 的坐标为 $(2, 4)$, 所以 $k = 8$.

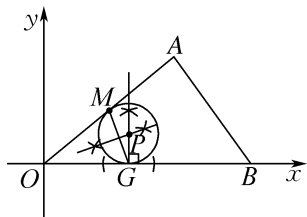
(2) 过点 C 作 $CF \perp x$ 轴于点 F . 因为 $BC \parallel x$ 轴, 所以 $y_C = y_B = 1$, 将 $y_C = 1$ 代入 $y = \frac{8}{x}$ 中, 得 $x_C = 8$, 所以点 C 的坐标为 $(8, 1)$. 由 k 的几何意义可知, $S_{\triangle AOE} = S_{\triangle COF}$, 所以 $S_{\triangle OAC} = S_{\triangle AOE} + S_{\text{梯形} AEFC} - S_{\triangle COF} = S_{\text{梯形} AEFC} = \frac{1}{2}(AE + CF) \cdot (OF - OE) = 15$.

25. 解: (1) 过点 A 作 $AH \perp OB$ 于点 H , 则 $\angle AHO = \angle AHB = 90^\circ$, 所以 $\angle AOH + \angle OAH = 90^\circ$. 因为 OB 为直径, 所以 $\angle OAB = 90^\circ$, 所以 $\angle OAH + \angle BAH = 90^\circ$, 所以 $\angle AOH = \angle BAH$, 所以 $\tan \angle AOH = \tan \angle BAH$, 所以 $\frac{AH}{OH} = \frac{BH}{AH}$, 即 $AH^2 = OH \cdot BH$. 由题意, 得 $OB = 5, OH = \frac{16}{5}$, 所以 $BH = OB - OH = \frac{9}{5}$. 所以 $AH =$

$\sqrt{OH \cdot BH} = \frac{12}{5}$, 所以点 A 的纵坐标为 $\frac{12}{5}$.

(2) 如图, $\odot P$ 即为所求. (答案不唯一)

提示: 在 x 轴上任取一点 G , 连接 MG , 作线段 MG 的垂直平分线; 过点 G 作 x 轴的垂线, 交 MG 的垂直平分线于点 P , 易知 $PM = PG$; 以点 P 为圆心, PG 长为半径作 $\odot P$ 即可.



(3) 设点 P 的坐标为 $(x, y) (y > 0)$. 由(1)可知, 点 $A\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$. 因为 M 为 OA 的中点, 所以点 $M\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$. 因为 $PG \perp OB$, $PG = PM$, 所以 $y^2 = \left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{6}{5}\right)^2$, 整理, 得 $y = \frac{5}{12}\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{3}{5}$, 所以当 $x = \frac{8}{5}$ 时, $y_{\text{最小值}} = \frac{3}{5}$. 所以点 P 纵坐标的最小值为 $\frac{3}{5}$.

26. (1) 135 提示: 连接 AE . 因为四边形 $ABCD$ 为正方形, 所以 $AB = BC = CD = AD$, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$. 因为点 B 关于直线 AP 的对称点为 E , 所以 $AE = AB = AD$, 所以 $\angle ABE = \angle AEB$, $\angle AED = \angle ADE$. 因为 $\angle BAD + \angle ABE + \angle BED + \angle ADE = 360^\circ$, 所以 $\angle BAD + \angle AEB + \angle BED + \angle AED = 360^\circ$, 即 $90^\circ + 2\angle BED = 360^\circ$, 所以 $\angle BED = 135^\circ$.

(2) 解: 因为点 B, E 关于直线 AP 对称, 所以 $AP \perp BE$, $OB = OE$. 因为 P 是 BC 的中点, 所以 $BP = CP = 2$, 所以 $CE \parallel OP$, 所以 $CE \perp BE$. 在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中, $\sin \angle CBE = \frac{CE}{BC}$. 在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 中, 由勾股定理, 得 $AP = \sqrt{AB^2 + BP^2} = 2\sqrt{5}$, $\sin \angle BAP = \frac{BP}{AP}$. 因为 $\angle CBE + \angle ABO = \angle BAP + \angle ABO = 90^\circ$, 所以 $\angle CBE = \angle BAP$. 所以 $\sin \angle CBE = \sin \angle BAP$, 所以 $\frac{CE}{BC} = \frac{BP}{AP}$, 即 $\frac{CE}{4} = \frac{2}{2\sqrt{5}}$, 所

以 $CE = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

(3) $\frac{1}{2}$ 提示: 设 BF 交 CD 于点 M . 因为 $DF \perp BF$,

$\angle BCD = 90^\circ$, 所以 $\angle CDF + \angle DMF = 90^\circ$, $\angle CBF + \angle BMC = 90^\circ$, 又因为 $\angle DMF = \angle BMC$, 所以 $\angle CDF = \angle CBF$. 因为 $OC \perp CF$, 所以 $\angle DCF + \angle OCD = 90^\circ$. 因为 $\angle BCO + \angle OCD = 90^\circ$, 所以 $\angle BCO = \angle DCF$, 又因为 $BC = DC$, 所以 $\triangle CBO \cong \triangle CDF$ (ASA), 所以 $OC = FC$, $\angle BOC = \angle DFC$, 所以 $\angle BOC - \angle BOP = \angle DFC - \angle DFB$, 即 $\angle COP = \angle CFM$, 易证 $\triangle COP \cong \triangle CFM$ (ASA), 所以 $CP = CM$. 易证 $\triangle ABP \cong \triangle BCM$ (ASA), 所以 $BP = CM$. 所以 $BP = CP = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB$, 所以 $\tan \angle BAP = \frac{1}{2}$.

27. 解: (1) 30 60 90 (答案不唯一)

(2) $\angle B$ 的度数不变, 等于 60° . 理由如下:

由题意, 设 $\angle A : \angle B : \angle C = (n-1) : n : (n+1)$, 其中 $n \geq 2$, 且 n 为正整数, 所以

$$\angle B = 180^\circ \times \frac{n}{(n-1) + n + (n+1)} = 180^\circ \times \frac{1}{3} = 60^\circ.$$

(3) $\triangle ABC$ 一定为“和谐三角形”. 理由如下:

分两种情况讨论: ①当 $S_{\triangle ACF} = 2S_{\triangle ABF}$ 时, 设 $BF = m$, 则 $CF = 2BF = 2m$, $BC = 3m$. 连接 AD, CD . 因为 BD 为直径, 所以 $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$. 又因为 $\angle OBC = 30^\circ$, 所以 $\angle BDC = 90^\circ - \angle OBC = 60^\circ$. 由同弧所对的圆周角相等, 得 $\angle BAC = \angle BDC = 60^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, 由 $\cos \angle CBD = \frac{BC}{BD}$, 得 $BD =$

$\frac{BC}{\cos \angle CBD} = 2\sqrt{3}m$. 因为 $AF \perp BD$, $\angle OBC = 30^\circ$, 所以 $\angle AFB = 60^\circ = \angle CAB$. 又因为 $\angle ABF = \angle CBA$, 所以 $\triangle ABF \sim \triangle CBA$, 所以 $AB^2 = BC \cdot BF$, 即 $AB^2 = 3m \cdot m$, 解得 $AB = \sqrt{3}m$, 所以 $AB = \frac{1}{2}BD$. 在 $\text{Rt}\triangle BAD$ 中, 由 $\cos \angle ABD = \frac{AB}{BD} = \frac{1}{2}$, 得 $\angle ABD =$

60° , 所以 $\angle ABC = \angle ABD + \angle OBC = 90^\circ$, 此时 AC 为 $\odot O$ 的直径, 所以 $\angle ACB = 90^\circ - \angle BAC = 30^\circ$. 因为 $\angle ACB : \angle BAC : \angle ABC = 1 : 2 : 3$, 所以 $\triangle ABC$ 为“和谐三角形”.

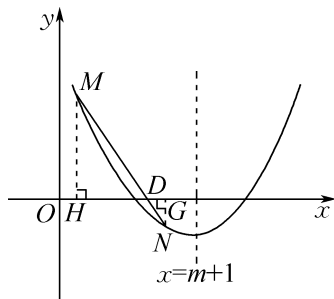
②当 $S_{\triangle ABF} = 2S_{\triangle ACF}$ 时, 设 $CF = m$, 则 $BF = 2CF = 2m$, $BC = 3m$. 连接 AD, CD . 同理可得 $\angle BAC = 60^\circ$, $BD = \frac{BC}{\cos \angle CBD} = 2\sqrt{3}m$, $AB = \sqrt{BF \cdot BC} = \sqrt{6}m$, 在 $\text{Rt}\triangle BAD$ 中, 由 $\cos \angle ABD = \frac{AB}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 得 $\angle ABD = 45^\circ$. 所以 $\angle ABC = \angle ABD + \angle OBC = 75^\circ$. 所以 $\angle ACB = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = 45^\circ$. 因为 $\angle ACB : \angle BAC : \angle ABC = 3 : 4 : 5$, 所以 $\triangle ABC$ 为“和谐三角形”.
综上所述, $\triangle ABC$ 一定为“和谐三角形”.

【解后反思】本题新定义了“和谐三角形”这一概念, 重在考查现场学习的能力. 问题的设计围绕着对于“和谐三角形”的理解, 问题(1)(2)是已知“和谐三角形”, 求角的度数, 而问题(3)是要根据已知条件, 判断是否为“和谐三角形”, 问题解决的关键就是紧扣概念, 若已知“和谐三角形”, 则三个内角的度数之比为连续的正整数, 若要判断“和谐三角形”, 就是要说明三个内角的度数之比为连续的正整数.

28. 解: (1) 当 $m=0$ 时, $y=x^2-2x$. 令 $y=0$, 则 $x^2-2x=0$, 解得 $x_1=0, x_2=2$. 因为点 A 在点 B 的左侧, 所以点 $A(0,0), B(2,0)$.
(2) $\triangle ABC$ 的面积不变, 恒为 1. 理由如下:
对于 $y=x^2-(2m+2)x+m^2+2m$, 令 $y=0$, 则 $x^2-(2m+2)x+m^2+2m=(x-m)[x-(m+2)]=0$, 解得 $x_1=m, x_2=m+2$. 因为点 A 在点 B 的左侧, 所以点 $A(m,0), B(m+2,0)$, 所以 $AB=2$. 因为直线 $y=-x+b$ 经过点 $A(m,0)$, 所以 $0=-m+b$, 所以 $b=m$, 所以 $y=-x+m$. 令 $(x-m)[x-(m+2)]=-x+m$, 解得 $x_1=m, x_2=m+1$. 所以 $x_C=m+1$, 所以 $y_C=-1$. 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot |y_C| = 1$.

(3) 由题可知, 该二次函数的对称轴为直线 $x=m+1$, 由 $5-2m \leq x \leq 2m-1$, 得 $5-2m \leq 2m-1$, 解得 $m \geq \frac{3}{2}$, 所以 $m+1 \geq \frac{5}{2}$. 又因为 $\frac{5-2m+2m-1}{2} = 2$, 即范围 $5-2m \leq x \leq 2m-1$ 的中点为 $x=2$. 所以抛物线的对称轴在直线 $x=2$ 的右侧.

①当 $2m-1 \leq m+1, m \leq 2$, 即 $\frac{3}{2} \leq m \leq 2$ 时, 因为抛物线开口向上, 所以当 $5-2m \leq x \leq 2m-1$ 时, y 随 x 的增大而减小(如图所示). 所以当 $x=5-2m$ 时, 最高点 $M(5-2m, 9m^2-24m+15)$. 当 $x=2m-1$ 时, 最低点 $N(2m-1, m^2-4m+3)$. 分别过点 M, N 作 $MH \perp x$ 轴于点 $H, NG \perp x$ 轴于点 G . 易证 $\triangle MDH \sim \triangle NDG$. 所以 $\frac{MH}{NG} = \frac{MD}{ND} = 3$, 即 $\frac{|y_M|}{|y_N|} = 3$, 所以 $\frac{|9m^2-24m+15|}{|m^2-4m+3|} = 3$, 解得 $m=2, m=1$ (舍去). 当 $m=2$ 时, 抛物线的函数表达式为 $y=x^2-6x+8$.
②当 $2 < m+1 < 2m-1$, 即 $m > 2$ 时, 在顶点处取得最低点, 所以点 $N(m+1, -1)$. 当 $x=5-2m$ 时, 最高点 $M(5-2m, 9m^2-24m+15)$. 由 $\frac{|y_M|}{|y_N|} = 3$, 得 $9m^2-24m+15=3$, 解得 $m_1=2$ (舍去), $m_2=\frac{2}{3}$ (舍去). 综上所述, 抛物线的函数表达式为 $y=x^2-6x+8$.



【解后反思】本题综合考查了二次函数的相关知识, 条件所给的抛物线表达式中含有字母参数 m , 问题(1)对于参数 m 取特殊值 0, 而问题(2)(3)逐步一般化, 问题设计体现出从特殊到一般的数学思想; 问题(2)中的抛物线和直线的位置随着 m 取值的变化而变化, 但在这变化过程中, 发现 $\triangle ABC$ 的边 AB 的长度始终不变, 点 C 到 x 轴的距

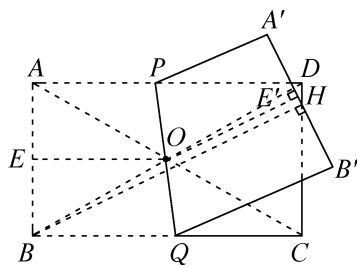
离始终不变,即边 AB 上的高始终不变,也就是 $\triangle ABC$ 的面积始终是定值,这又体现了变中不变的数学思想;问题(3)属于区间最值问题,具有一定的挑战性,能起到压轴区分的作用,关键是要分析出范围中点与二次函数对称轴的位置关系.由于二次函数是轴对称图形,最高点和最低点的取值和横坐标与对称轴的距离有关,同时也与所给出区间在对称轴同侧和异侧有关,由于对称轴以及区间的端点都含有参数 m ,需要对 m 的范围进行分类讨论,如果不加思考就去讨论,会有很多情况需要考虑,而其中有不少情况可以事先就排除,由题可知对称轴为 $x=m+1$,由不等式 $5-2m \leq x \leq 2m-1$ 可得 $m \geq \frac{3}{2}$,这样就可以确定 $5-2m$ 在 $m+1$ 的左边,易得范围 $5-2m \leq x \leq 2m-1$ 的中点为 $x=2$, $x=m+1 \geq \frac{5}{2} > 2$,又可以确定抛物线的对称轴在直线 $x=2$ 的右侧,在此基础上再分类讨论,可以减少讨论情况,进而也减少了计算量,这与当下新中高考命题方向完全一致,少思则需要多算,多思则可以少算,因而拿到题目后需要思考后再下笔,磨刀确实可以不误砍柴工.

D30* 镇江市 2024 年中考模拟优化卷

- ± 2 2. $x \neq -1$ 3. 3×10^{-10} 4. 75
- 16 6. 50 7. 3π 8. -3
- $\frac{1}{5}$ 提示:过点 B 作 $BD \perp AC$,垂足为 D .由格点三角形可知 $AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$, $AB = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. 因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 - \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = \frac{3}{2}$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{3\sqrt{2}}{2} BD$, 所以 $\frac{3\sqrt{2}}{2} BD = \frac{3}{2}$, 所以 $BD = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 所以 $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. 所以 $\tan \angle BAC = \frac{BD}{AD} = \frac{1}{5}$.
- $\frac{1}{16}$ 提示:对于 $y = ax^2 + c$ ($a \neq 0$),令 $x = -2$, $y = 1$,则 $1 = 4a + c$, 所以 $c = 1 - 4a$, 所以 $ac = a(1 - 4a) = -4a^2 + a = -4\left(a - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{16}$. 因为 $-4 < 0$, 所以 ac 的最大值为 $\frac{1}{16}$.
- 5 提示:因为四边形 $ABCD$ 为菱形,所以 $AB = BC = CD = AD = 9$, $AB \parallel CD$. 因为 $\angle ABC = 60^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形. 所以 $AC = AB = 9$, $\angle BAC = \angle ACB = 60^\circ$, 所以 $CE = AC - AE = 6$. 因为 $AB \parallel$

CD , 所以 $\angle ECF = \angle BAC = \angle ACB = 60^\circ$. 因为 $\angle BEC + \angle CBE = 180^\circ - \angle ACB = 120^\circ$, $\angle BEF = 120^\circ = \angle BEC + \angle CEF$, 所以 $\angle CEF = \angle CBE$. 所以 $\triangle BEC \sim \triangle EFC$, 所以 $\frac{BC}{EC} = \frac{CE}{CF}$, 即 $6^2 = 9CF$. 所以 $CF = 4$, 所以 $DF = CD - CF = 5$.

12. $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ 提示:如图,连接 AC, BD 交于点 O ,过点 B 作 $BH \perp A'B'$ 于点 H ,过点 O 分别作 $OE \perp AB$ 于点 E , $OE' \perp A'B'$ 于点 E' , 则 $\angle AEO = 90^\circ$. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $OA = OC = OB = OD$, $\angle ABC = 90^\circ$, 所以 $\angle ABC = \angle AEO$, 所以 $OE \parallel BC$, 所以 $\triangle AEO \sim \triangle ABC$, 所以 $\frac{OE}{CB} = \frac{OA}{CA} = \frac{1}{2}$, 所以 $OE = \frac{1}{2} CB = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 由折叠的性质,得 $A'B' = AB = 1$, $OE' = OE = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 由勾股定理,得 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2$, 所以 $OB = OA = OC = 1$. 因为 $BH \leq OB + OE'$, 且 OB, OE' 的长均为定值,所以当 B, O, E' 三点共线,即点 H 与点 E' 重合时, BH 的长最大,最大值为 $OB + OE' = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. 此时, $\triangle BA'B'$ 的面积最大,最大值为 $\frac{1}{2} A'B' \cdot BH = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

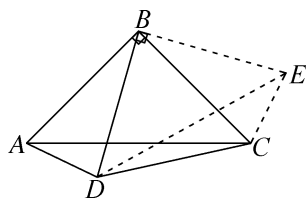


【解后反思】求面积,找底高.本题中 $\triangle BA'B'$ 的底 $A'B' = AB = 1$,故当高 BH 最大时,其面积也最大,而高 $BH \perp A'B'$,观察发现 OB 为定长线段,通过作 $OE' \perp A'B'$ 于点 E' ,计算得到 OE' 也为定长线段,于是将垂线段转化为定长折线段,故当 B, O, E' 三点共线时,其高有最大值,即可求得 $\triangle BA'B'$ 面积的最大值.

- D 14. C 15. A
- C 提示:记绳子两端点为 A, B , 线段 AB 上有两点 C, D , 且 $AC = BD = 0.4$ m, 则在 AC 或 BD 上任取一点,即可符合题意. 故所求概率为 $\frac{0.4+0.4}{1} = \frac{4}{5}$.
- D 提示:由题意可知,快递车行驶 $2a$ m 所需时间为

$40-30=10(\text{min})$,所以快递车行驶 $a \text{ m}$ 所需时间为 5 min ,所以快递车行驶的总时间为 $(3a+3a) \div a \times 5=30(\text{min})$,所以快递车在每个驿站卸包裹的时间为 $(40-30) \div 2=5(\text{min})$.

18. C 提示:如图,过点 B 作 $BE \perp BD$,且使 $BE=BD$,连接 DE, CE . 易证 $\triangle ABD \cong \triangle CBE$,所以 $CE=AD=2$. 因为 $\triangle BDE$ 为等腰直角三角形,所以 $BD=\frac{\sqrt{2}}{2}DE$. 所以当 DE 长取最大值时, BD 长取最大值. 因为 $DE \leq CD+CE=6$,所以当 $DE=6$ 时, BD 长的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}DE=3\sqrt{2}$.

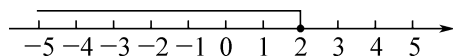


【解后反思】凡有“等腰直角三角形”“等边三角形”等条件的题型,均可通过旋转变换构造全等三角形,将所求问题化归. 本题所求 BD 长的最大值,就是通过构造全等三角形,转化为求 DE 长的最大值. 本题也可利用“广义的托勒密定理”直接求之,即因四边形 $ABCD$ 存在着 $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$,又因为 $AC=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}BC$,从而 $\sqrt{2}BD \leq CD+AD$,即可得之.

19. 解:(1) 原式 $= 3 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{2}$.

$$(2) \text{ 原式} = \frac{x-2}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)^2}{2(x+1)} + \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{2(x-1)} + \frac{2}{2(x-1)} = \frac{x}{2(x-1)}, \text{ 当 } x=\sqrt{2}+1 \text{ 时, 原式} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

20. 解:(1) 方程两边同时乘以 $x(3x-2)$,得 $3x-2=x^2$,解得 $x_1=1, x_2=2$. 经检验, $x_1=1, x_2=2$ 是原分式方程的解.
(2) $2(2x+1)-(3x-2) \leq 6, 4x+2-3x+2 \leq 6, x+4 \leq 6$,解得 $x \leq 2$. 解集在数轴上表示如下:



21. (1) 证明:因为 $BE=CF$,所以 $BE+EF=$

$CF+EF$,即 $BF=CE$. 在 $\text{Rt} \triangle ABF$ 和 $\text{Rt} \triangle DCE$ 中, $\begin{cases} BF=CE, \\ AB=DC, \end{cases}$ 所以 $\text{Rt} \triangle ABF \cong \text{Rt} \triangle DCE (\text{HL})$.

- (2) $\frac{12}{5}$ 提示:在 $\text{Rt} \triangle ABF$ 中,由勾股定理,得 $BF=\sqrt{AB^2+AF^2}=5$. 当四边形 $AEFD$ 是矩形时, $AE \perp BC$,此时 $S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2}BF \cdot AE = \frac{1}{2}AB \cdot AF$,所以 $AE = \frac{AB \cdot AF}{BF} = \frac{12}{5}$.

22. 解:(1) 10 18 78.5 44%

【易错警示】中位数是将这 50 名学生的成绩从小到大排列,处在中间位置的两个数(第 25,26 名)的平均数. 因此中位数是 $\frac{78+79}{2}=78.5(\text{分})$,而不是 C 组的中位数 77 分.

(2) 乙的说法不正确. 理由如下:

本次测试成绩的中位数是 78.5 分,而 $77 < 78.5$,说明甲的成绩低于一半学生的成绩.

23. 解:(1) $\frac{1}{4}$

(2) 将倒入蒸馏水、白醋溶液、食用碱溶液、柠檬水溶液的 4 个烧杯分别记为 A, B, C, D, 列表如下:

项目	A	B	C	D
A	——	(B, A)	(C, A)	(D, A)
B	(A, B)	——	(C, B)	(D, B)
C	(A, C)	(B, C)	——	(D, C)
D	(A, D)	(B, D)	(C, D)	——

由表可知,共有 12 种等可能的结果,将紫色石蕊试剂滴入,食用碱溶液(C)呈现蓝色,白醋溶液(B)、柠檬水溶液(D)均呈现红色,故其中一杯变红、一杯变蓝的结果有 4 种,所以所求概率为 $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

24. 解:过点 A 作 $AE \perp CD$ 于点 E ,分别过点 B 作 $BF \perp CD$ 于点 $F, BG \perp AE$ 于点 G ,延长 CB 交 AE 于点 H . 在 $\text{Rt} \triangle BCF$ 中, $\angle C=30^\circ, BC=24 \text{ cm}$,所以 $BF=\frac{1}{2}BC=12 \text{ cm}$. 易证四边形 $BFEG$ 为矩形,所以 $EG=BF=$

12 cm. 在 $\text{Rt} \triangle HCE$ 中, $\angle C = 30^\circ$, 所以 $\angle CHE = 60^\circ$. 因为 $\angle ABC = 130^\circ$, 所以 $\angle ABH = 50^\circ$. 由外角的性质, 得 $\angle BAG = \angle CHE - \angle ABH = 10^\circ$. 在 $\text{Rt} \triangle ABG$ 中, $AB = 24$ cm, 所以 $AG = AB \cdot \cos \angle BAG \approx 24 \times 0.985 = 23.64$ (cm), 所以 $AE = AG + EG = 23.64 + 12 \approx 35.6$ (cm).

答: 此时顶部边缘 A 处离桌面 CD 的高度约为 35.6 cm.

25. (1) 6

(2) 证明: 由题得 $CD = 6$, $BC = 4$. 则点 $E\left(\frac{k}{4}, 4\right)$, $F\left(6, \frac{k}{6}\right)$, 所以 $DE = \frac{k}{4}$, $BF = \frac{k}{6}$.

所以 $CE = CD - DE = 6 - \frac{k}{4}$, $CF = BC -$

$BF = 4 - \frac{k}{6}$. 因为 $\frac{CE}{CD} = \frac{6 - \frac{k}{4}}{6} = \frac{24 - k}{24}$, $\frac{CF}{CB} =$

$\frac{4 - \frac{k}{6}}{4} = \frac{24 - k}{24}$, 所以 $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB}$. 而 $\angle BCD =$

$\angle FCE$, 所以 $\triangle BCD \sim \triangle FCE$. 所以 $\angle DBC = \angle EFC$, 所以 $EF \parallel BD$.

(3) 解: 过点 O 作 $OM \perp AB$ 于点 M, 过点 G 作 $GN \perp AB$ 于点 N. 则 $OM \parallel GN$, 所以 $\triangle AOM \sim \triangle AGN$, 所以 $\frac{AM}{AN} = \frac{OM}{GN} = \frac{AO}{AG}$. 因

为四边形 ABCD 为矩形, 所以 $AO = OC$. 因为 $\frac{OG}{GC} = \frac{1}{2}$, 所以 $GC = 2OG$. 所以 $AO =$

$OC = OG + GC = 3OG$, 所以 $\frac{AO}{AG} =$

$\frac{3OG}{3OG + OG} = \frac{3}{4}$, 所以 $\frac{AM}{AN} = \frac{OM}{GN} = \frac{3}{4}$. 易知点

$O(3, 2)$, 所以 $AM = 3$, $OM = 2$, 所以 $AN = 4$, $GN = \frac{8}{3}$, 所以点 $G\left(4, \frac{8}{3}\right)$, 所以 $k = \frac{32}{3}$.

26. (1) 证明: 连接 OA, OB, OC. 因为 $AB = AC$, $OB = OC$, 所以 OA 垂直平分 BC. 因为 $AE \parallel BC$, 所以 $OA \perp AE$. 又因为 OA 为 $\odot O$ 的半径, 所以 AE 为 $\odot O$ 的切线.

(2) ①证明: 由题得 BD 为 $\odot O$ 的直径, 所以 $\angle BCD = 90^\circ$. 因为 $AE \parallel BC$, 所以 $\angle AEC = 180^\circ - \angle BCD = 90^\circ$. 因为 $AG \perp BD$, 即 $\angle AGB = 90^\circ$, 所以 $\angle AEC = \angle AGB$, 在

$\triangle ABG$ 和 $\triangle ACE$ 中, $\begin{cases} \angle AGB = \angle AEC, \\ \angle ABG = \angle ACE, \\ AB = AC, \end{cases}$ 所以

$\triangle ABG \cong \triangle ACE$ (AAS).

②解: 由①知 $\triangle ABG \cong \triangle ACE$, 所以 $BG = CE$, $AG = AE$. 在 $\text{Rt} \triangle ADG$ 和 $\text{Rt} \triangle ADE$

中, $\begin{cases} AD = AD, \\ AG = AE, \end{cases}$ 所以 $\text{Rt} \triangle ADG \cong \text{Rt} \triangle ADE$

(HL), 所以 $DG = DE$. 因为 $GF = 2$, $DF = 1$,

所以 $DE = DG = GF + DF = 3$. 设 $CD = x$, 则 $BG = CE = x + 3$, 所以 $BD = BG + DG =$

$x + 6$. 因为 $CF \perp BD$, 所以 $\angle CFD = 90^\circ =$

$\angle BCD$. 又因为 $\angle CDF = \angle BDC$, 所以

$\triangle CDF \sim \triangle BDC$, 所以 $CD^2 = DF \cdot BD$, 即

$x^2 = x + 6$, 解得 $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ (舍去). 所以

$BD = x + 6 = 9$.

27. 解: (1) 设该抛物线的函数表达式为 $y =$

$a(x+1)^2 + 3$. 将 $x = -3$, $y = -1$ 代入, 得 $-1 =$

$a(-3+1)^2 + 3$, 解得 $a = -1$, 所以 $y =$

$-(x+1)^2 + 3$. 当 $x = m-1$ 时, $y = -m^2 + 3$, 所

以无论 m 取何实数值, 点 M 都在此抛物线上.

(2) 令 $y = 0$, 则 $-(x+1)^2 + 3 = 0$, 解得

$x_1 = -1 + \sqrt{3}$, $x_2 = -1 - \sqrt{3}$. 所以点

$B(-1 - \sqrt{3}, 0)$, $C(-1 + \sqrt{3}, 0)$, $BC = 2\sqrt{3}$.

因为点 D 在抛物线的对称轴上, $\triangle PQM$ 是

$\triangle ABC$ 以点 D 为位似中心的位似图形, 且

它们的位似比是 $1 : \sqrt{3}$, 所以点 P 在抛物线

的对称轴上, 点 Q, M 均在抛物线上, 且

$BC \parallel QM$, $\frac{QM}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 所以 $QM = 2$. 因为抛物

线的对称轴垂直平分 QM, 即点 Q 与点 M 关

于抛物线的对称轴对称. 分情况讨论: 当点

M 在对称轴左侧时, $-1 - (m-1) = 1$, 解得

$m = -1$, 此时位似中心 D 在 QM 下方, 且点

A, D, P 在对称轴上自上而下依次排列. 当

点 M 在对称轴右侧时, $(m-1)-(-1)=1$, 解得 $m=1$, 此时位似中心 D 在 QM 上方, 且点 D, P, A 在对称轴上自上而下依次排列. 综上所述, $m=\pm 1$.

28. (1) 证明: 设 AP_2 与小圆交于点 D , 连接 BD , 所以 $\angle AP_1B = \angle ADB$. 因为 $\angle ADB$ 是 $\triangle BDP_2$ 的外角, 所以 $\angle ADB = \angle DBP_2 + \angle AP_2B$, 所以 $\angle ADB > \angle AP_2B$, 所以 $\angle AP_1B > \angle AP_2B$.

(2) 解: 设直线 l 分别与线段 AB, y 轴交于点 E, N , 过点 B 作 $BM \perp y$ 轴于点 M . 由题得 $OA=2, OM=5, BM=3$, 所以 $AM=OM-OA=3=BM$, 所以点 M 在线段 AB 的垂直平分线 l 上, 即点 M, N 重合, 所以点 $N(0, 5)$. 由中点坐标公式, 得点 $E(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$. 由待定系数法, 得直线 l 的函数表达式为 $y=-x+5$. 设点 $C(a, -a+5) (a>0)$. 因为 $AC=PC$, 即 $\sqrt{a^2+(-a+5-2)^2}=-a+5$, 整理得 $a^2+4a-16=0$, 解得 $a_1=2\sqrt{5}-2, a_2=-2\sqrt{5}-2$ (舍去). 所以点 P 的坐标为 $(2\sqrt{5}-2, 0)$.

(3) 解: 连接 PC 并延长, 交 $\odot C$ 于点 E , 连接 AE . 因为 PE 是 $\odot C$ 的直径, 所以 $\angle PAE=90^\circ$, 所以 $\angle E + \angle APE=90^\circ$. 因为 $\odot C$ 与 x 轴相切于点 P , 所以 $PC \perp x$ 轴, 所以 $\angle APD + \angle APE=90^\circ$, 所以 $\angle E = \angle APD$; 因为 $\angle E = \angle B$, 所以 $\angle APD = \angle B$; 又因为 $\angle PDA = \angle BDP$, 所以 $\triangle PDA \sim \triangle BDP$, 所以 $PD^2 = AD \cdot BD$; 由待定系数法, 得直线 AB 的函数表达式为 $y=x+2$. 当 $y=0$ 时, $x=-2$, 所以点 $D(-2, 0)$. 由两点间的距离公式, 得 $AD=\sqrt{(-2-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}, BD=\sqrt{(-2-3)^2+(0-5)^2}=5\sqrt{2}$. 所以 $PD=\sqrt{AD \cdot BD}=2\sqrt{5}$, 所以 $OP=PD-OD=2\sqrt{5}-2$, 所以点 P 的坐标为 $(2\sqrt{5}-2, 0)$.

(4) 作法不唯一, 以下作法供参考.

作法 1 如图 1, 延长 BA 交射线 MN 于点

F , 由 (3) 可知, $PF^2=FA \cdot FB$. 设 $FA=a, FB=b$, 以 $a+b$ 为直径画半圆, 构造 $c^2=ab$, 然后以点 F 为圆心, c 为半径画弧, 交射线 MN 于点 P , 则点 P 即为所求.

作法 2 构造位似图形法 ($\triangle ACQ \sim \triangle A'C'Q, \triangle PCQ \sim \triangle P'C'Q$), 如图 2. ①作线段 AB 的垂直平分线 l 交射线 MN 于点 Q ; ②在直线 l 上任取一点 C' , 过点 C' 作射线 MN 的垂线, 进而作 $\odot C'$ 与射线 MN 相切于点 P' ; ③连接 AQ 交 $\odot C'$ 于点 A' , 连接 $A'C'$, 过点 A 作 $AC \parallel A'C'$ (即 $\angle CAQ = \angle C'A'Q$) 交直线 l 于点 C ; ④过点 C 作射线 MN 的垂线, 进而作 $\odot C$ 与射线 MN 相切于点 P , 则点 P 即为所求.

作法 3 如图 3, 延长 BA 交射线 MN 于点 D , 作线段 AB 的垂直平分线 l 交 AB 于点 O . 设 $OD=a, OA=OB=b$, 则 $AD=a-b, BD=a+b$. 由 (3) 可知, $PD^2=AD \cdot BD=(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. 过点 B 作 BD 的垂线; 以点 O 为圆心, a 为半径画弧交 BD 的垂线于点 D' , 则 $D'B^2=a^2-b^2=PD^2$, 即 $D'B=PD$; 以点 D 为圆心, $D'B$ 长为半径画弧交射线 MN 于点 P , 则点 P 即为所求.

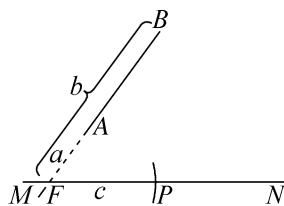


图 1

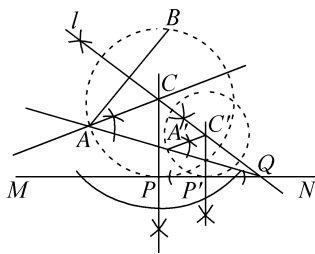


图 2

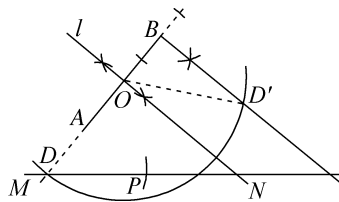


图 3

【归纳拓展】(1) 我们将顶点在圆内的角称作“圆内角”, 有“圆内角一定大于圆周角”, 同理, 将顶点在圆外, 并且两边与圆相交的角称作“圆外角”, 有“圆外角一定小于圆周角”.

(2) 从圆外一点引圆的切线和割线, 切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项. 同理, 从圆外一点引

圆的两条割线,这一点到每条割线与圆的交点的两条线段长的积相等.圆内的两条相交弦,被交点分成的两条线段长的积相等.

(3) 由一条切线与经过切点的弦组成的角被称作“弦切角”,它的度数等于它所夹的弧所对的圆心角度数的一半,等于它所夹的弧所对的圆周角度数.

D31* 南通市 2024 年中考模拟优化卷

1. D 2. C 3. B 4. D 5. A
6. B 提示: 因为 $x \leq n+1$ 恰有 3 个正整数解, 故 $3 \leq n+1 < 4$, 即 $2 \leq n < 3$.
7. D 提示: 由圆内接四边形的性质, 得 $\angle ABQ = 180^\circ - \angle APQ = 65^\circ$. 由圆周角定理, 得 $\angle AOQ = 2\angle ABQ = 130^\circ$. 因为点 C, D 将 $\widehat{AB}$ 分成相等的三段弧, 所以 $\angle AOD = \frac{2}{3} \times 180^\circ = 120^\circ$. 因为 $\angle AOQ > \angle AOD$, 所以点 Q 在 $\widehat{DB}$ 上.
8. C 提示: 由作图可知 PQ 垂直平分线段 BC , 所以 $CE = BE, CD = BD$, 所以 $\angle DBC = \angle DCB$. 因为 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以 $\angle DBC + \angle A = 90^\circ, \angle DCB + \angle ACD = 90^\circ$. 所以 $\angle A = \angle ACD$, 所以 $AD = CD = BD = \frac{1}{2}AB$. 所以 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 所以 $AC \parallel DE, AC = 2DE$, 故选项 A, B 正确. 因为 $BE = CE, AD = BD$, 所以 $S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}S_{\triangle BCD}, S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$, 所以 $S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle BDE}$, 所以 $S_{\text{四边形}ACED} = 3S_{\triangle BDE}$, 故选项 D 正确. 只有当 $\angle B = 30^\circ$ 时, $AB = 2AC$, 故选项 C 不一定正确.
9. D 提示: 由条件可知 $p = -2, q > 2$, 所以 $-q < -2, p+q > 0$. 令 $px - q = \frac{p+q}{x}$, 整理得 $px^2 - qx - p - q = 0$. 因为 $p = -2$, 所以 $(-q)^2 - 4p \cdot (-p - q) = q^2 + 8(2 - q) = (q - 4)^2 \geq 0$, 所以反比例函数 $y = \frac{p+q}{x}$ 的图像在第一、三象限, 且两函数图像必然有交点.
10. B 提示: 解法 1 将条件中的等式化为关于 a 的方程 $(b-1)a^2 + (2b+1)a + b+1 = 0$, 由题意可知, 该方程有解. 若 $b=1$, 则 $3a+2=0$, 解得 $a = -\frac{2}{3}$; 若 $b \neq 1$, 则根的判别式为 $(2b+1)^2 - 4(b-1)(b+1) \geq 0$, 解得 $b \geq -\frac{5}{4}$.

解法 2 整理原式, 得 $b(a+1)^2 = a^2 - a - 1$. 当 $a = -1$ 时, $b(a+1)^2 = 0, a^2 - a - 1 = 1$, 不合题意, 舍去; 当 $a \neq -1$ 时, $b = \frac{a^2 - a - 1}{(a+1)^2} = \frac{(a+1)^2 - 3(a+1) + 1}{(a+1)^2} = \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{3}{a+1} + 1$. 设 $t = \frac{1}{a+1} (t \neq 0)$, 则 $b = t^2 - 3t + 1 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$, 所以 $b \geq -\frac{5}{4}$.

【方法点拨】本题选项给出的是符合条件的可能取值, 因此可利用“转化与化归”的数学思想, 求得实数 b 的取值范围, 从而检验给出的数据是否符合条件. 之所以选用这两种解法, 其一是因为题目中的等式形式上可看作是关于字母 a 的一元二次方程, 从而利用根的判别式法, 列出关于 b 的不等式, 进而求其范围; 其二是因为该等式还可以看作是关于字母 b 的一次方程, 进而转化为一个分式函数, 再通过整体分离变量法, 化归为二次函数而求其最值.

11. $x \geq -5$ 12. $a(a+2b)(a-2b)$ 13. 4π
14. 4 s 15. $\frac{\sqrt{3}}{5}$
16. $\frac{75}{8}$ 提示: 由勾股定理的逆定理可证 $\triangle ABC$ 为直角三角形. 作 AB 的垂直平分线, 交 AB 于点 E , 交 BC 于点 F , 则 $BE = \frac{1}{2}AB = 5, EF \perp AB$. 因为点 D 在 $\triangle ABC$ 内部(含边界), 所以若 $DA = DB$, 则点 D 在线段 EF 上; 若 $DA > DB$, 则点 D 在 $\triangle BEF$ 内部(含边界). 所以所有满足条件的点 D 组成区域的面积即为 $\triangle BEF$ 的面积. 易证 $\triangle ABC \sim \triangle FBE$, 所以 $\frac{EF}{CA} = \frac{BE}{BC}$, 即 $\frac{EF}{6} = \frac{5}{8}$, 所以 $EF = \frac{15}{4}$, 所以 $\triangle BEF$ 的面积为 $\frac{1}{2}BE \cdot EF = \frac{75}{8}$.
17. 3 提示: 连接 OB , 分别过点 A, B 作 $AD \perp x$ 轴于点 $D, BE \perp x$ 轴于点 E , 则 $BE \parallel AD$. 因为 $AB = 3BC$, 所以 $\frac{BC}{AC} = \frac{BC}{AB+BC} = \frac{1}{4}, \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, 所以 $\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OAC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, 所以 $S_{\triangle OAB} = \frac{3}{4} \times \frac{15}{2} = \frac{45}{8}$. 易证 $\triangle BCE \sim \triangle ACD$, 则 $\frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{4}$, 所以 $AD = 4BE$. 设点 B 的坐标为 $\left(\frac{k}{a}, a\right)$, 则点 A 的坐标为 $\left(\frac{k}{4a}, 4a\right)$. 由 k 的几何意义可知, $S_{\triangle OAD} = S_{\triangle OBE} = \frac{1}{2}k$. 所以 $S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OAD} +$

$$S_{\text{梯形}ABED} - S_{\triangle OBE} = S_{\text{梯形}ABED} = \frac{1}{2}(AD+BE) \cdot DE = \frac{45}{8}, \text{即} \frac{1}{2}(4a+a) \cdot \left(\frac{k}{a} - \frac{k}{4a}\right) = \frac{45}{8}, \text{解得} k=3.$$

18. $\sqrt{2}-1$ 提示:解法1 如图1,连接AC,BD交于点O,连接OE,BF.易证 $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形,所以 $\angle ABO=45^\circ$, $AB=\sqrt{2}OB=2$,所以 $OB=OA=\sqrt{2}$.由旋转的性质,得 $BE=EF$, $\angle BEF=90^\circ$,所以 $BF=\sqrt{2}BE$, $\angle FBE=45^\circ$.所以 $\angle FBE - \angle FBO = \angle ABO - \angle FBO$,即 $\angle ABF = \angle OBE$.又因为 $\frac{AB}{OB} = \frac{BF}{BE} = \sqrt{2}$,所以 $\triangle ABF \sim \triangle OBE$,所以 $\frac{AF}{OE} = \sqrt{2}$,即 $AF = \sqrt{2}OE$.因为 $OE+OA \geq AE$,所以 $OE \geq AE - OA$.当A,O,E三点依次共线,即点E在线段OC上时,等号成立,此时线段OE的长最小,即线段AF的长最小.如图2,过点E作 $EH \perp CD$ 于点H.由条件,得 $AE=AB=BC=CD=2$, $AC=2\sqrt{2}$,所以 $CE=AC-AE=2\sqrt{2}-2$.易证 $\triangle CEH$ 是等腰直角三角形,所以 $EH=CH=\frac{\sqrt{2}}{2}CE=2-\sqrt{2}$,所以 $DH=CD-CH=\sqrt{2}$.在 $\text{Rt}\triangle DEH$ 中, $\tan \angle CDE = \frac{EH}{DH} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$.

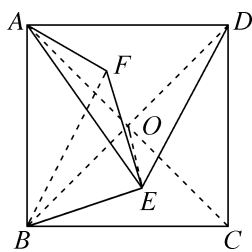


图1

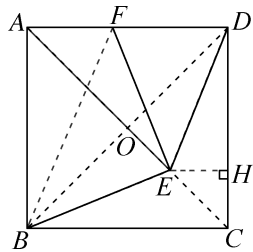


图2

解法2 连接EC,AC.因为 $AB=AE$,所以 $\angle ABE = \angle AEB$.由旋转的性质,得 $BE=EF$, $\angle BEF=90^\circ = \angle ABC$.所以 $\angle BEF - \angle AEB = \angle ABC - \angle ABE$,即 $\angle AEF = \angle CBE$.又因为 $AB=AE=CB$,所以 $\triangle AEF \cong \triangle CBE$ (SAS),所以 $AF=CE$.因为 $CE+AE \geq AC$,所以 $CE \geq AC-AE$.当A,E,C三点依次共线时,等号成立,此时线段CE的长最小,即线段AF的长最小.同解法1可求得, $\tan \angle CDE = \sqrt{2}-1$.

【方法点拨】有关几何图形的最值问题,关键是确定动点的路径,再利用“两点之间线段最短”或“垂线段最短”等公理求得最值.从本题条件可知,动点E在以点A为圆心,AB长为半径的圆弧上运动,而AF的长度恰好等于CE的长,从而将问题转化为“当CE的长最小时”,进而求得 $\tan \angle CDE$.

19. 解:(1) 原式 $=4-4+1-9=-8$.

$$(2) \text{原式} = \frac{(m+2)(m-2)-5}{m-2} \cdot \frac{m-2}{2m-6} = \frac{m^2-9}{m-2} \cdot \frac{m-2}{2(m-3)} = \frac{(m+3)(m-3)}{m-2} \cdot \frac{m-2}{2(m-3)} = \frac{m+3}{2}.$$

20. (1) ①9 ②8.8

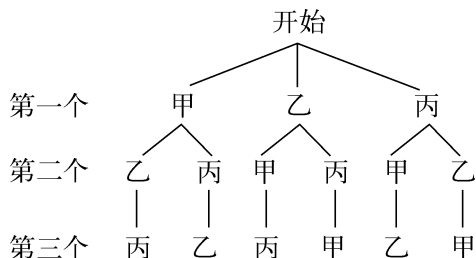
(2) 解:选甲更合适.理由如下:

因为甲、乙、丙三人的平均成绩一样,说明三人实力相当,但是甲成绩的中位数高于丙,且方差最小,说明五位评委对甲的打分分值比较均衡,故选甲更合适.

(3) $<$

21. (1) $\frac{1}{3}$

(2) 解:画树状图如下:



由图可知,共有6种等可能的结果,其中甲比乙先出场的结果有3种,故 $P(\text{甲比乙先出场}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

22. (1) 一

(2) 证明:因为 $PB=PC$,所以 $\angle PBC = \angle PCB$.因为 $\angle ABP = \angle ACP$,所以 $\angle ABP + \angle PBC = \angle ACP + \angle PCB$,即 $\angle ABC = \angle ACB$,所以 $AB=AC$.又因为 $AP=AP$, $PB=PC$,所以 $\triangle ABP \cong \triangle ACP$ (SSS),所以 $\angle APB = \angle APC$.

23. 解:(1) 连接OD.因为BC与 $\odot O$ 相切于点D,所以 $OD \perp BC$.因为 $BD=CD$,所以 $OB=OC$,所以 $\angle OCB = \angle B$.因为 $OA \perp AC$,OA为 $\odot O$ 的半径,所以CA与 $\odot O$ 相切于点A.又因为BC与 $\odot O$ 相切于点D,所以 $\angle ACB = 2\angle OCB = 2\angle B$.因为 $\angle B +$

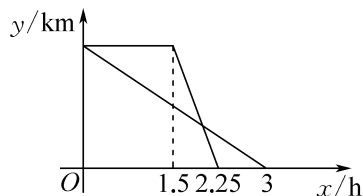
$\angle ACB = 90^\circ$, 所以 $3\angle B = 90^\circ$, 所以 $\angle B = 30^\circ$.

(2) 由(1)得 $\angle ACO = \frac{1}{2}\angle ACB = 30^\circ$, $CA = CD = 30$ cm, $\angle OAC = 90^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle ACO$ 中, 由 $\tan\angle ACO = \frac{OA}{CA} = \tan 30^\circ$, 得 $OA = CA \cdot \tan 30^\circ = 10\sqrt{3}$ (cm), 所以 $AE = 2OA = 20\sqrt{3}$ cm. 在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中, 由勾股定理, 得 $CE = \sqrt{CA^2 + AE^2} = 10\sqrt{21}$ (cm).

24. 解: (1) 甲的速度为 $30 \div 3 = 10$ (km/h).

(2) $y = \begin{cases} 30 (0 \leq x \leq 1.5), \\ -40x + 90 (1.5 < x \leq 2.25). \end{cases}$ 函数

图像如图所示.



提示: 由题意知, 乙比甲晚出发 1.5 h, 乙的行驶时间为 $30 \div 40 = 0.75$ (h), $1.5 + 0.75 = 2.25$ (h), 即甲出发 2.25 h 时, 乙到达 B 地. 当 $0 \leq x \leq 1.5$ 时, 乙与 B 地的距离 $y = 30$; 当 $1.5 < x \leq 2.25$ 时, 由待定系数法, 得 $y = -40x + 90$.

(3) 由题意, 得甲与 B 地的距离为 $y = -10x + 30$ ($0 \leq x \leq 3$), 令 $-10x + 30 = -40x + 90$, 解得 $x = 2$, 此时乙追上了甲. 当乙在行驶途中与甲相距 5 km 时, 分两种情况:

① 当 $1.5 < x \leq 2$ 时, $-40x + 90 - (-10x + 30) = 5$, 解得 $x = \frac{11}{6}$; ② 当 $2 < x \leq 2.25$ 时, $-10x + 30 - (-40x + 90) = 5$, 解得 $x = \frac{13}{6}$.

综上所述, x 的值为 $\frac{11}{6}$ 或 $\frac{13}{6}$.

25. 解: (1) 90° 提示: 由翻折可知, $\angle APB = \angle A'PB$, $\angle DPE = \angle D'PE$. 因为 $\angle APB + \angle A'PB + \angle DPE + \angle D'PE = 180^\circ$, 所以 $\angle BPE = \angle A'PB + \angle D'PE = 90^\circ$.

(2) 设 $AP = x$ cm, 则 $DP = (32 - x)$ cm, 设 $D'E = DE = y$ cm. 由题可知, $\angle A = \angle D = 90^\circ$, 所以 $\angle ABP + \angle APB = 90^\circ$. 因为

$\angle BPE = 90^\circ$, 所以 $\angle APB + \angle DPE = 90^\circ$, 所以 $\angle ABP = \angle DPE$. 所以 $\triangle ABP \sim \triangle DPE$, 所以 $\frac{AB}{DP} = \frac{AP}{DE}$, 即 $\frac{24}{32-x} = \frac{x}{y}$, 所以 $y = \frac{(32-x)x}{24} = -\frac{1}{24}(x-16)^2 + \frac{32}{3}$. 当 $x = 16$ 时, y 有最大值, 最大值为 $y = \frac{32}{3}$, 所以 DE 长的最大值为 $\frac{32}{3}$ cm.

(3) 如图 1, 以 FG 为一边补全矩形 $FGHD$, 连接 FQ . 在 $\text{Rt}\triangle FKQ$ 中, 由勾股定理, 得 $FQ^2 = FK^2 + KQ^2 = 2125$ (cm^2). 在 $\text{Rt}\triangle FQG$ 中, 由勾股定理, 得 $QG = \sqrt{FQ^2 - FG^2} = 10$ (cm). 设 $DF = x$ cm, 则 $HQ = (x - 10)$ cm, $DK = y$ cm, 则 $HK = (45 - y)$ cm. 同(2)可证 $\triangle DFK \sim \triangle HKQ$, 所以 $\frac{DF}{HK} = \frac{FK}{KQ}$, $\frac{DK}{HQ} = \frac{FK}{KQ}$, 即 $\frac{x}{45-y} = \frac{35}{30}$,

$\frac{y}{x-10} = \frac{35}{30}$, 解得 $\begin{cases} x=28, \\ y=21. \end{cases}$ 所以 $DF = 28$ cm,

所以矩形 $FGHD$ 的面积为 $FG \cdot DF = 28 \times 45 = 1260$ (cm^2).

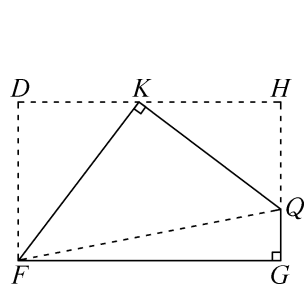


图 1

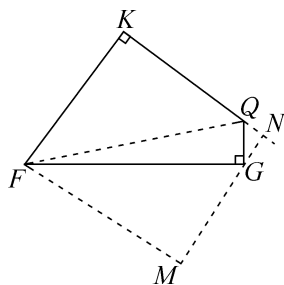


图 2

如图 2, 以 FK 为一边补全矩形 $FKNM$, 连接 FQ . 设 $FM = x$ cm, 则 $QN = (x - 30)$ cm, $GM = y$ cm, 则 $GN = (35 - y)$ cm.

同理可得, $\triangle FMG \sim \triangle GNQ$, 所以 $\frac{FM}{GN} =$

$\frac{FG}{GQ}$, $\frac{GM}{QN} = \frac{FG}{GQ}$, 即 $\frac{x}{35-y} = \frac{45}{10}$, $\frac{y}{x-30} = \frac{45}{10}$,

解得 $\begin{cases} x=36, \\ y=27. \end{cases}$ 所以 $FM = 36$ cm, 所以矩形

$FKNM$ 的面积为 $FK \cdot FM = 35 \times 36 =$

1 260(cm²). 综上所述,该矩形纸片的面积为 1 260 cm².

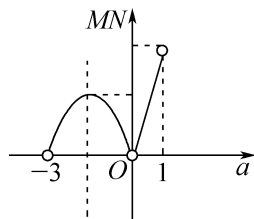
26. (1) 解:由题意可知,该抛物线的对称轴为直线 $x = -1$, 所以 $\frac{x_B + x_A}{2} = -1$, 即 $x_B + x_A = -2$. 因为 $AB = 4$, 所以 $x_B - x_A = 4$, 所以 $x_A = -3, x_B = 1$. 所以点 $A(-3, 0), B(1, 0)$. 将点 $B(1, 0)$ 代入 $y = mx^2 + 2mx + n$, 得 $m + 2m + n = 0$, 即 $3m + n = 0$.

(2) 证明:解法 1 由(1)得 $n = -3m$, 所以 $y = mx^2 + 2mx - 3m = m(x+1)^2 - 4m$. 所以点 $C(0, -3m), D(-1, -4m)$. 过点 D 作 $DF \parallel x$ 轴, 交 AC 的延长线于点 F . 由待定系数法, 得直线 AC 的函数表达式为 $y = -mx - 3m$. 令 $y = -4m$, 则 $-mx - 3m = -4m$, 解得 $x = 1$, 所以点 $F(1, -4m)$, 所以 $DF = 2$. 因为 $DF \parallel x$ 轴, 所以 $\triangle DFE \sim \triangle BAE$, 所以 $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{FD} = 2$, 所以 $BE = 2DE$.

解法 2 由待定系数法, 得直线 AC 的函数表达式为 $y = -mx - 3m$, 直线 BD 的函数表达式为 $y = 2mx - 2m$. 进而联立方程组, 解得点 E 的坐标为 $(-\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}m)$, 从而 $BE = \sqrt{(1+\frac{1}{3})^2 + (\frac{8}{3}m)^2} = \frac{4}{3}\sqrt{1+4m^2}$, $DE = \sqrt{(-1+\frac{1}{3})^2 + (-4m+\frac{8}{3}m)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{1+4m^2}$, 故 $BE = 2DE$.

(3) 解:由(2)得直线 AC 的函数表达式为 $y = -mx - 3m$. 设点 $M(a, ma^2 + 2ma - 3m) (-3 \leq a < 1$ 且 $a \neq 0)$. 因为 $MN \parallel x$ 轴, 所以点 N 的纵坐标为 $ma^2 + 2ma - 3m$. 由 $-mx - 3m = ma^2 + 2ma - 3m$, 得 $x = -a^2 - 2a$. 则点 $N(-a^2 - 2a, ma^2 + 2ma - 3m)$, 所以 $MN = |-a^2 - 2a - a| = |a^2 + 3a|$. 如图, 画出该函数图像的草图, 结合图像分情况讨论: 当 $0 < MN < \frac{9}{4}$ 时, 对应的 a 的值有 3 个, 故符合条件的点 M 有 3 个; 当 $MN =$

$\frac{9}{4}$ 时, 对应的 a 的值有 2 个, 故符合条件的点 M 有 2 个; 当 $\frac{9}{4} < MN < 4$ 时, 对应的 a 的值有 1 个, 故符合条件的点 M 有 1 个.

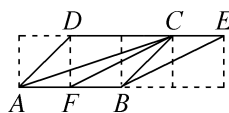


【解后反思】本题是二次函数与平面几何结合的综合题, 利用对称性易求第(1)问. 而第(2)问, 可有两种解法, 其一是几何法, 利用相似三角形来证之; 其二是解析法, 即用方程的思想, 联立直线 AC 与 BD 的表达式, 求得交点 E 的坐标, 再利用两点间的距离公式, 直接计算得证. 第(3)问属于探究题, 审清题意是关键, 即讨论线段 MN 的取值范围, 从而确定点 M 的个数, 特别注意的是点 N “在直线 AC 上”, 而不是线段 AC 上, 故有“3 个点”这一情形.

D32 盐城市 2024 年中考模拟优化卷

1. D 2. D 3. C 4. C 5. D 6. B

7. C 提示: 如图, 选取 B, C 两个顶点, 则有 $\triangle ABC \sim \triangle BCE, \triangle ABC \sim \triangle CBF$; 选取 A, C 两个顶点, 则有 $\triangle ABC \sim \triangle CDA$.



【解后反思】由图可知, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 135^\circ$, 且 $\frac{AB}{BC} = \sqrt{2}$. 根据这些特征, 很容易找到与之相似的三角形. 特别注意的是题中条件“从 $\triangle ABC$ 的三个顶点中选取两个顶点, 再从余下的格点中选取一个格点连接成格点三角形”, 想要不多、不漏、不重的找到符合要求的相似三角形, 可以采取分类(选取点 B, C 或点 A, B 或点 A, C)讨论的思想方法解之.

8. D 提示: 因为 $a > 0$, 所以当 $x < t$ 时, y 随 x 的增大而减小; 当 $x > t$ 时, y 随 x 的增大而增大. 分类讨论: ①当 $x_1 < x_2 \leq t$ 时, $y_1 < y_2$ 不成立; ②当 $x_2 > x_1 \geq t$ 时, $y_1 < y_2$ 恒成立, 此时 $x_1 + x_2 > 2t$, 因为对于 $x_1 + x_2 > 4$, 都有 $y_1 < y_2$, 所以 $2t \leq 4$, 即 $t \leq 2$; ③当 $x_1 <$

$t < x_2$ 时, 因为 $y_1 < y_2$, 所以 $t - x_1 < x_2 - t$, 即 $x_1 + x_2 > 2t$, 同理可得 $t \leq 2$.

9. $x > 2$ 10. $(x-2)^2$ 11. $\frac{2}{3}$ 12. 12

13. $1 < m < 3$ 14. -7 15. 35°

16. $\frac{1}{7}$ 或 1 提示: 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M. 分情况

讨论: ①如图 1, 当 AE 交线段 BM 于点 F 时, 过点 E 作 $EN \perp BC$ 于点 N, 所以 $AM \parallel EN$, 所以 $\triangle AMF \sim \triangle ENF$, 所以 $\frac{MF}{NF} = \frac{AM}{EN} = \frac{AF}{EF} = 3$. 设 $EN = m$, 则

$AM = 3m$. 在 $\text{Rt}\triangle ACM$ 中, 由 $\tan \angle ACB = \frac{AM}{CM} = \frac{3}{4}$,

得 $CM = 4m$. 由勾股定理, 得 $AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = 5m$. 由折叠的性质, 得 $AE = AB = AC = 5m$. 因为

$AF = 3EF$, 所以 $AF = \frac{3}{4}AE = \frac{15}{4}m$. 在 $\text{Rt}\triangle AFM$

中, 由勾股定理, 得 $MF = \sqrt{AF^2 - AM^2} = \frac{9}{4}m$. 所以

$NF = \frac{1}{3}MF = \frac{3}{4}m$. 所以 $CN = CM + MF + NF =$

$7m$. 在 $\text{Rt}\triangle CEN$ 中, $\tan \angle BCE = \frac{EN}{CN} = \frac{1}{7}$. ②如图

2, 当 AE 交线段 CM 于点 F 时, 同理可得 $CN =$

$CM - MF - NF = m$, 此时 $\tan \angle BCE = \frac{EN}{CN} = 1$. 综上

所述, $\tan \angle BCE$ 的值为 $\frac{1}{7}$ 或 1.

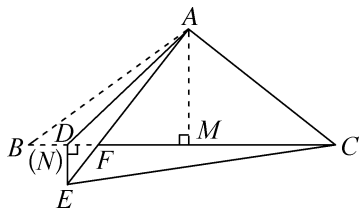


图 1

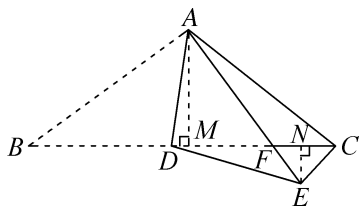


图 2

【解后反思】翻折问题本质上是轴对称问题, 解题过程中要充分利用轴对称的性质. 此题属于动态中的翻折, 其难点在于分类讨论思想的运用和辅助线的添加. 由于对称轴(折痕)随着动点 D 在边 BC 上的位置变化而变化, AF 长从 $5m$ 逐渐减小到 $3m$ (AF 与 AM 重合, 此时 $\frac{AF}{EF} =$

$\frac{3}{2}$), 再逐渐增大到 $5m$ (AF 与 AC 重合), $\frac{AF}{EF}$ 的值也随之

改变, 观察发现, 当 $\frac{AF}{EF} = 3$ 时, 会有两种情况, 因此需要分情况讨论. 求某个角的锐角三角函数值的关键是将该角置于一个直角三角形中(转化角或者构造直角三角形), 从而自然而然联想到辅助线的作法($EN \perp BC$), 而等腰三角形中常见的辅助线是作底边上的高(三线合一), 然后通过设参数法, 利用相似和勾股定理表示出相关线段的长, 进而根据正切的定义解之.

17. 解: 原式 $= 1 + 2\sqrt{2} - 4 \times \frac{1}{2} + 3 = 2 + 2\sqrt{2}$.

18. 解: $2x + 3 > 4(x - 1)$, $2x + 3 > 4x - 4$,
 $-2x > -7$, 解得 $x < \frac{7}{2}$. 所以不等式的正整数解为 1, 2, 3.

19. 解: 原式 $= \left(\frac{a^2 - 9}{a - 3} + \frac{5}{a - 3} \right) \div \frac{a + 2}{2a - 6} =$
 $\frac{a^2 - 4}{a - 3} \div \frac{a + 2}{2a - 6} = \frac{(a + 2)(a - 2)}{a - 3} \cdot$
 $\frac{2(a - 3)}{a + 2} = 2a - 4$. ①当 $a = -1$ 时, 原

式 $= -6$. ②当 $a = 0$ 时, 原式 $= -4$. (a 不能取 -2)

20. 解: (1) $\frac{1}{4}$

(2) 列表如下:

景区	A	B	C	D
A	(A, A)	(B, A)	(C, A)	(D, A)
B	(A, B)	(B, B)	(C, B)	(D, B)
C	(A, C)	(B, C)	(C, C)	(D, C)
D	(A, D)	(B, D)	(C, D)	(D, D)

由表可知, 共有 16 种等可能的结果, 他们选择相同景区的结果有 4 种. 所以他们选择相同景区的概率为 $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

21. 解: (1) 15 30 30

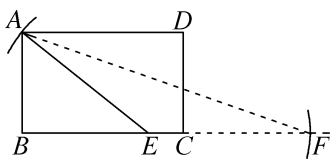
选项 E 中八年级的人数为 $40 - 8 - 6 - 12 - 2 = 12$, 补全的条形统计图略.

(2) E A B 或 E B A 理由如下:

估计参加主题活动 A, B, E 的人数分别为

$1\,000 \times 15\% = 150$, $1\,000 \times 15\% = 150$, $1\,000 \times 30\% = 300$, 所以主题活动 E 只能安排在南院多功能厅星期一进行, 主题活动 A, B 安排在北院多功能厅星期二或星期四进行.

22. 解: 如图, 点 F 即为所求. 提示: 以点 E 为圆心, EA 长为半径作弧, 交 BC 的延长线于点 F, 连接 AF, 则 $\angle FAE = \angle AFC$. 因为 $AD \parallel EF$, 所以 $\angle DAF = \angle AFC$, 所以 $\angle DAF = \angle FAE$, 所以 AF 平分 $\angle DAE$.



(2) 四边形 AEFD 是菱形. 理由如下:

因为四边形 ABCD 是矩形, 所以 $AD \parallel EF$. 由(1)可知, $AE = EF$, 又因为 $AD = AE$, 所以 $AD = EF$. 所以四边形 AEFD 是平行四边形. 又因为 $AE = AD$, 所以 $\square AEFD$ 是菱形.

23. 解: (1) 设乙种树苗单价为 x 元/棵, 则甲种树苗单价为 $1.5x$ 元/棵. 根据题意, 得 $\frac{1\,800}{1.5x} = \frac{1\,440}{x} - 20$, 解得 $x = 12$. 经检验 $x = 12$ 是原方程的解. 则 $1.5x = 18$.

答: 甲种树苗单价是 18 元/棵, 乙种树苗单价是 12 元/棵.

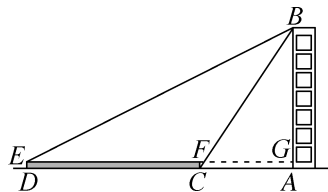
(2) 设购进 y 棵乙种树苗, 则购进甲种树苗 $(100 - y)$ 棵. 根据题意, 得 $18(100 - y) + 12y \leq 1\,527$. 解得 $y \geq 45.5$. 又因为 y 为整数, 所以 y 的最小值为 46.

答: 最少购进 46 棵乙种树苗.

24. 解: 如图, 延长 EF 交 AB 于点 G, 则 $DE = CF = AG = 1$ m, $DC = EF = 20$ m, $CA = FG$, $DA = EG$, $\angle EGB = 90^\circ$. 设 $CA = FG = x$ m, 则 $EG = DA = DC + AC = (20 + x)$ m. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = AC \cdot \tan \angle BCA = \sqrt{3}x$ (m). 所以 $BG = AB - AG = (\sqrt{3}x - 1)$ m. 在 $\text{Rt}\triangle BEG$ 中, $BG = EG \cdot \tan \angle BEG$, 即 $\sqrt{3}x - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(20 + x)$. 解得 $x = 10 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. 所

$$\text{以 } AB = \sqrt{3}x = 10\sqrt{3} + \frac{3}{2} \approx 19 \text{ (m)}.$$

答: 教学楼 AB 的高约为 19 m.



25. (1) 证明: 连接 OE. 因为 $OE = OC$, 所以 $\angle C = \angle OEC$. 因为 $AB = BC$, 所以 $\angle C = \angle A$, 所以 $\angle A = \angle OEC$, 所以 $AB \parallel OE$. 因为 $EG \perp AB$, 所以 $EG \perp OE$. 因为 OE 是 $\odot O$ 的半径, 所以 EG 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 解: 过点 E 作 $EH \perp CG$ 于点 G. 设 $OC = OE = OB = r$. 在 $\text{Rt}\triangle BGF$ 中, $\sin \angle GBF = \frac{GF}{GB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\angle GBF = 60^\circ$. 因为 $AB \parallel OE$, 所以 $\angle EOG = \angle GBF = 60^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle EGO$ 中, $OE = GO \cdot \cos \angle EOG$, 即 $r = \frac{1}{2}(4 + r)$,

解得 $r = 4$. 所以 $OC = OE = 4$. 在 $\text{Rt}\triangle OEH$ 中, $EH = OE \cdot \sin \angle EOH = 2\sqrt{3}$. 因为 $\angle EOG = 60^\circ$, 所以 $\angle EOC = 180^\circ - \angle EOG = 120^\circ$. 因为 $S_{\triangle EOC} = \frac{1}{2} OC \cdot EH = 4\sqrt{3}$,

因为 $S_{\text{扇形}EOC} = \frac{120}{360} \times \pi \times 4^2 = \frac{16}{3}\pi$, 所以 $S_{\text{阴影}} =$

$$S_{\text{扇形}EOC} - S_{\triangle EOC} = \frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}.$$

26. (1) 证明: 因为四边形 ABCD 是正方形, 所以 $AB = AD$, $\angle BAD = 90^\circ$. 由题可知 $AE = AF$, $\angle EAF = \angle BAD = 90^\circ$, 所以 $\angle EAD = \angle FAB$, 所以 $\triangle AED \cong \triangle AFB$, 所以 $DE = BF$.

(2) 解: 连接 EF, AC. 因为四边形 ABCD 是菱形, 所以 $AB = AC$. 因为 $\angle B = 60^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形. 因为 P 是 AB 的中点, 所以 $\angle APC = 90^\circ$. 由题可知 $PA = PE$, $PD = PF$, $\angle APE = \angle DPF = 90^\circ$, 所以 $\angle APD = \angle EPF$, 所以 $\triangle APD \cong \triangle EPF$, 所以 $EF = AD = 6$. 过点 P 作 $MN \perp BC$, 分别

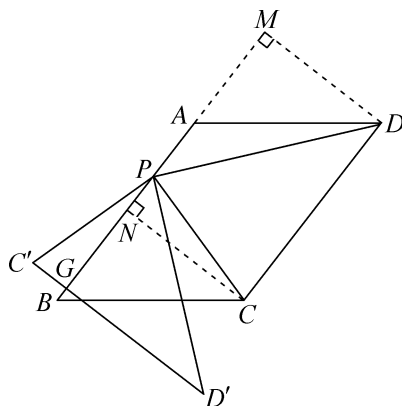
交 BC, DA 延长线于点 N, M . 在 $\text{Rt}\triangle BPN$ 中, $PN = BP \cdot \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 则 $BN = \frac{3}{2}$. 同理

$AM = \frac{3}{2}$, $PM = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 因为 $\angle MPD + \angle PDM = 90^\circ$, $\angle MPD + \angle GPN = 90^\circ$, 所以 $\angle PDM = \angle GPN$. 因为 $\angle PMD = \angle GNP = 90^\circ$, 所以 $\triangle PMD \sim \triangle GNP$, 所以 $\frac{DM}{PN} = \frac{PM}{GN}$,

即 $\frac{6 + \frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{GN}$, 所以 $GN = \frac{9}{10}$, 所以 $CG =$

$6 - \frac{3}{2} - \frac{9}{10} = \frac{18}{5}$. 因为 $\angle ADP = \angle NPG = \angle PFE$, 所以 $EF \parallel MN$, 所以 $EF \perp CG$. 所以四边形 $CEGF$ 的面积为 $\frac{1}{2}CG \cdot EF = \frac{54}{5}$.

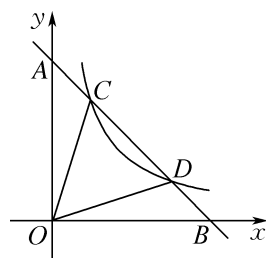
(3) BP 的长为 6 或 18 或 $10 + \sqrt{14}$ 或 $10 - \sqrt{14}$. 提示: 如图, 分别过点 C, D 作 $CN \perp AB$, $DM \perp AB$, 垂足分别为 N, M . 设直线 AB 与 $C'D'$ 交于点 G . 因为 $AD \parallel BC$, 所以 $\angle MAD = \angle B$, 所以 $\sin \angle MAD = \frac{MD}{AD} = \frac{4}{5}$, 所以 $MD = \frac{4}{5}AD = 8$. 又因为 $DM \perp AB$, 所以 $AM = 6$. 根据旋转的性质, 得 $\triangle PC'D' \cong \triangle PCD$, 所以 $C'D' = CD = 12$, $\angle PD'C' = \angle PDC$. 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle PDC = \angle DPM$, 所以 $\angle PD'C' = \angle DPM$. 又因为 $\angle DPM + \angle D'PG = 180^\circ - \angle DPD' = 90^\circ$, 所以 $\angle PD'C' + \angle D'PG = 90^\circ$, 所以 $\angle PGD' = 90^\circ = \angle DMP$. 又因为 $PD' = DP$, 所以 $\triangle PD'G \cong \triangle DPM$, 所以 $D'G = PM$, $PG = DM = 8$. 设 $BP = x$, 则 $AP = |12 - x|$, $D'G = PM = |18 - x|$, $BG = |x - 8|$, 所以 $C'G = |x - 6|$, 所以 $BC'^2 = (x - 6)^2 + (x - 8)^2$, $BD'^2 = (x - 8)^2 + (18 - x)^2$. 分情况讨论: ① 当 $\angle C'BD' = 90^\circ$ 时, $(x - 6)^2 + (x - 8)^2 + (x - 8)^2 + (18 - x)^2 = 12^2$, 解得 $x = 10 \pm \sqrt{14}$; ② 当 $\angle BC'D' = 90^\circ$ 时, $(x - 6)^2 + (x - 8)^2 + 12^2 = (x - 8)^2 + (18 - x)^2$, 解得 $x = 6$; ③ 当 $\angle BD'C' = 90^\circ$ 时, $(x - 6)^2 + (x - 8)^2 = 12^2 + (x - 8)^2 + (18 - x)^2$, 解得 $x = 18$. 综上所述, BP 的长为 6 或 18 或 $10 + \sqrt{14}$ 或 $10 - \sqrt{14}$.



27. 解: (1) $y_1 + y_2 = 2x$.

(2) ②③

(3) ① 由“中心对称函数”的定义, 得函数 $y = 3x - 4$ 的“中心对称函数”为 $y = -x + 4$. 如图, 设直线 $y = -x + 4$ 分别交 x 轴, y 轴于点 B, A , 则点 $B(4, 0)$, $A(0, 4)$, 所以 $OA = OB = 4$. 设点 C, D 的坐标分别为 $(a, -a + 4)$, $(b, -b + 4)$. 所以 $S_{\triangle COD} = 8 - 2a - 2(-b + 4) = 4$, 所以 $b = a + 2$. 所以点 $D(a + 2, -a + 2)$. 所以 $a(-a + 4) = (a + 2) \cdot (-a + 2)$, 解得 $a = 1$. 所以点 $C(1, 3)$, 所以 $m = 3$.



② 函数 $y = -\frac{3}{x}$ 的“中心对称函数”为 $y = 2x + \frac{3}{x}$, 此函数图像在第一象限内有最低点,

最低点的坐标为 $(\frac{\sqrt{6}}{2}, 2\sqrt{6})$. 提示: 设第一象

限内最低点为 (x, a) , 则需满足 $2x + \frac{3}{x} = a$ ($a > 0$, $x > 0$), 即 $2x^2 - ax + 3 = 0$ 有正数解. 所以 $(-a)^2 - 4 \times 2 \times 3 \geq 0$, 解得 $a \geq 2\sqrt{6}$ (负值已舍). 所以 y 的最小值为 $2\sqrt{6}$, 此时 $x = \frac{\sqrt{6}}{2} > 0$, 满足条件. 所以最低点坐标为 $(\frac{\sqrt{6}}{2}, 2\sqrt{6})$.

(4) 由“中心对称函数”的定义,得函数 $y=-ax^2+(2-b)x-c(a>0)$ 的“中心对称函数”为 $y=ax^2+bx+c(a>0)$. 因为点 $P(1,m), N(5,n)$ 在函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像上,所以 $m=a+b+c, n=25a+5b+c$. 因为 $m<n<c$, 所以 $a+b+c<25a+5b+c<c$, 所以 $a+b<25a+5b<0$. 因为 $a>0$, 所以 $-6<\frac{b}{a}<-5$, 所以 $5<-\frac{b}{a}<6$. 因为点 $P(1,m), M(t,m)$ 的纵坐标相等, 所以抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{1+t}{2}$, 即 $\frac{1+t}{2}=-\frac{b}{2a}$, 所以 $-\frac{b}{a}=t+1$, 所以 $5<t+1<6$, 解得 $4<t<5$. 令 $h=-\frac{1}{2}t^2-t+\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}(t+1)^2+3$, 所以当 $t>-1$ 时, h 随 t 的增大而减小. 当 $t=4$ 时, 则 $h=-\frac{19}{2}$. 所以 $h<-\frac{19}{2}$. 因为 $w>-\frac{1}{2}t^2-t+\frac{5}{2}$ 恒成立, 所以 $w\geq-\frac{19}{2}$.

【解后反思】本题关键在于正确理解“中心对称函数”的定义,认识到“中心对称函数”的实质是两函数只要满足“ $y_1+y_2=2x$ ”这一条件即可,由此可解答第(2)问,并且在第(3)问中,直接写出函数 $y=3x-4$ 的“中心对称函数”,进而解决①②问.第(4)问,同样写出已知函数的“中心对称函数”,再结合条件中给出的三点坐标,确定参数 t 的取值范围,进而求得函数 $h=-\frac{1}{2}t^2-t+\frac{5}{2}$ 在某一范围内的最值,最后得到 w 的取值范围,其中不等式 $w>h$ 恒成立的条件是 w 大于 h 的最大值.

D33* 泰州市 2024 年中考模拟优化卷

1. B 2. D 3. A 4. C 5. D

6. D 提示:由题图可知, $\text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle CDG$, $\text{Rt}\triangle ADH \cong \text{Rt}\triangle CBF$. 所以 $AE=CG$. 易证四边形 $EFGH$ 为矩形, 所以 $EF=GH$. 所以 $S_{\text{阴影}}=S_{\triangle AED}+S_{\triangle CGE}=\frac{1}{2}AE \cdot DH+\frac{1}{2}CG \cdot EF=\frac{1}{2}CG \cdot (DH+GH)=\frac{1}{2}CG \cdot DG=S_{\triangle CDG}$.

【解后反思】本题将证明勾股定理的四个完全相同的直角三角形,变化为两对全等的直角三角形,找出阴影部分两个三角形的底、高关系是解决问题的关键.

7. 1.003×10^4 8. $a(a-2)^2$ 9. 1 10. -1

11. 8π 12. $\frac{9}{2}$

13. 19 提示:设胜一局得 x 分,负一局得 y 分,平一局得 z 分,由 B, D 球队的积分可得方程组 $\begin{cases} 5x+3y=15, \\ x+7y=3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=3, \\ y=0. \end{cases}$ 将其代入 $2x+3y+3z=9$, 解得 $z=1$, 从而 $a=6 \times 3+1 \times 1=19$.

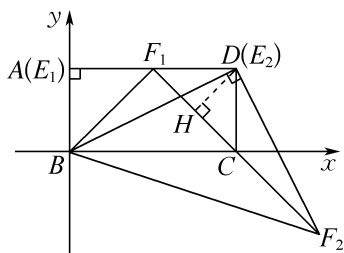
14. $\frac{1}{3}$ 提示:因为 $\angle ACB=90^\circ, AC=6, BC=8$, 所以 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$. 由折叠的性质,得 $\angle ABD=\angle CBD, BE=AB=10, AD=DE$, 所以 $CE=BE-BC=2$. 设 $CD=x$, 则 $DE=AD=AC-CD=6-x$, 在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, $CD^2+CE^2=DE^2$, 即 $x^2+2^2=(6-x)^2$, 解得 $x=\frac{8}{3}$, 所以 $CD=\frac{8}{3}$. 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $\tan\angle CBD=\frac{CD}{BC}=\frac{1}{3}$. 所以 $\tan\angle ABD=\tan\angle CBD=\frac{1}{3}$.

15. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ 提示:过点 A 作 $AQ \perp BC$ 于点 Q. 由题图可知, 当 $x=8$ 时, $AB=AP=y=8$, 当 $x=12$ 时, 点 P 到达点 Q, 即 $AB+BQ=12$, 所以 $BQ=12-AB=4$. 此时 AP 长最小, 最小值为 AQ 的长. 当 $x=15$ 时, 点 P 到达点 C, 即 $AB+BC=15$, 所以 $BC=15-AB=7$. 在 $\text{Rt}\triangle ABQ$ 中, 由勾股定理, 得 $AQ=\sqrt{AB^2-BQ^2}=4\sqrt{3}$. 由等积法, 得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BA \cdot CG=\frac{1}{2}BC \cdot AQ$, 即 $8CG=7 \times 4\sqrt{3}$, 所以 $CG=\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

【解后反思】本题考查了动点的函数图像,读懂函数图像是解决问题的关键.从图 1 中动点 P 的运动路线,要能够准确地找出图 2 中与之相对应的函数图像,并能根据图像中提供的数据求出三角形的边 AB 与 BC 的长,再由勾股定理求出边 BC 上的高,进而借助等积法求出边 AB 上的高.

16. 11 提示:以 B 为坐标原点, BC 所在直线为 x 轴, AB 所在直线为 y 轴, 建立平面直角坐标系. 设 $AE=m(0 \leq m \leq 12)$, 过点 F 作 $FG \perp AD$ 于点 G. 易证 $\triangle BAE \cong \triangle EGF$, 所以 $GF=AE=m, EG=BA=6$,

所以点 $F(m+6, 6-m)$. 令 $x=m+6(6 \leq x \leq 18)$, $y=6-m$, 则 $m=x-6, y=6-(x-6)=-x+12$. 所以点 F 在线段 $y=-x+12(6 \leq x \leq 18)$ 上, 当 $x=6$ 时, 点 $F_1(6, 6)$, 当 $x=18$ 时, 点 $F_2(18, -6)$. 如图, 过点 D 作 $DH \perp F_1F_2$ 于点 H . 易证 $\triangle DF_1H$ 为等腰直角三角形, 所以 $DH=F_1H=\frac{\sqrt{2}}{2}DF_1=3\sqrt{2}$. 所以当点 F 在点 F_1 与点 H 之间时, $3\sqrt{2} \leq DF \leq 6$, DF 长为整数有 5, 6. 由勾股定理, 得 $DB=\sqrt{AB^2+AD^2}=6\sqrt{5}$, 所以 $DF_2=DB=6\sqrt{5}$. 当点 F 在点 F_2 与点 H 之间时, $3\sqrt{2} \leq DF \leq 6\sqrt{5}$, DF 长为整数有 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. 所以满足条件的点 F 共有 11 个.



【解后反思】找出动点 F 的运动路径是解决问题的关键, 同时也是解难点. 本题通过建立平面直角坐标系, 设出动点 E 的横坐标为 m , 而点 F 的位置随着点 E 的变化而变化, 用含 m 的代数式表示出点 F 的坐标, 进而发现点 F 的运动路径是一条直线, 由于点 E 在边 AD 上运动, 所以点 F 的运动路径只能是直线的一部分, 即线段. 有了点的运动路径后, 就能够找出 DF 的取值范围, 在点 E 从点 A 向点 D 运动的过程中, DF 的长从 6 逐渐减小到 $3\sqrt{2}$, 再由 $3\sqrt{2}$ 逐渐增大到 $6\sqrt{5}$. 由于当 DF 的长为 5 或 6 时, 点 F 的位置分别有两种情况, 所以需要分开讨论, 不能仅关注最大值和最小值, 否则容易漏解. 本题也可通过构造相似三角形找到点 F 的运动路径. 取 AD 的中点 G , 连接 BG . 易证 $\triangle ABG$ 为等腰直角三角形. 所以 $\angle ABG=45^\circ$, 且 $\frac{AB}{BG}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $\triangle BEF$ 为等腰直角三角形, 所以 $\angle EBF=45^\circ$, 且 $\frac{BE}{BF}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\angle ABG - \angle EBG = \angle EBF - \angle EBG$, 即 $\angle ABE = \angle GBF$, $\frac{AB}{BG} = \frac{BE}{BF}$, 所以 $\triangle ABE \sim \triangle GBF$, 所以 $\angle BGF = \angle BAE = 90^\circ$, 即 $FG \perp BG$. 所以点 F 在与 BG 垂直的直线 FG 上运动, 进而根据点 E 的运动路径确定点 F 的运动路径.

17. 解: (1) 原式 $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 - 2\sqrt{3} = 1$.

(2) 两边都乘以 $x-4$, 得 $-3+2(x-4)=1-x$, 解得 $x=4$. 经检验, 当 $x=4$ 时, $x-4=0$, 所以 $x=4$ 是增根, 所以原分式方程无解.

18. 解: (1) 用表格列举出所有可能出现的情况如下:

情况	直行	左转	右转
直行	(直行, 直行)	(左转, 直行)	(右转, 直行)
左转	(直行, 左转)	(左转, 左转)	(右转, 左转)
右转	(直行, 右转)	(左转, 右转)	(右转, 右转)

(2) 由(1)可知, 共有 9 种等可能的情况, 其中至少有一辆车向左转的情况有 5 种, 所以 $P(\text{至少有一辆车向左转}) = \frac{5}{9}$.

19. 解: (1) 4.5 0.5

(2) 6 名学生人均每周课外阅读总时长为 $\frac{1}{6} \times (1 \times 3 + 1 \times 4 + 0.5 \times 4 + 0.5 \times 5 + 1.5 \times 6 + 0.5 \times 7) = 4(\text{h})$. 因为 $4 > 3$, 所以能达到学校目标.

20. 解: (1) 设规定时间是 x 天, 则甲厂单独完成这项任务需要 x 天, 乙厂单独完成这项任务需要 $(x+5)$ 天. 根据题意, 得 $\frac{1}{x} : \frac{1}{x+5} = 5 : 4$, 解得 $x=20$, 经检验, $x=20$ 是方程的解, 且符合题意.

答: 规定时间是 20 天.

(2) 设甲、乙两厂合作的时间为 y 天. 根据题意, 得 $\frac{y}{20} + \frac{20}{20+5} = 1$, 解得 $y=4$.

答: 甲、乙两厂合作的时间是 4 天.

21. 解: (1) 选①②或①③或②③

选①②: 因为 $\angle PAC = \angle B$, $\angle APC = \angle BPA$, 所以 $\triangle APC \sim \triangle BPA$, 所以 $\frac{PA}{PB} = \frac{AC}{BA} = \frac{PC}{PA}$. 因为 $AB=2AC$, 所以 $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PA} = \frac{1}{2}$, 所以 $PA=2PC$, 所以 $\frac{2PC}{6+PC} = \frac{1}{2}$, 所以

$$PC=2, PA=4.$$

选①③: 同理可得 $\frac{AC}{BA} = \frac{PC}{PA}$. 因为 $AB = 2AC$, 所以 $\frac{PC}{PA} = \frac{1}{2}$. 因为 $PC = 2$, 所以 $PA = 4$.

选②③: 过点 B 作 $BQ \parallel AP$, 交 AC 的延长线于点 Q , 则 $\angle Q = \angle PAC$. 易证 $\triangle APC \sim \triangle QBC$, 所以 $\frac{QC}{AC} = \frac{BC}{CP} = \frac{6}{2} = 3$, 所以 $QC = 3AC$, 所以 $AQ = 4AC$. 又因为 $AB = 2AC$, 所以 $AQ = 2AB$, 所以 $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AQ} = \frac{1}{2}$, 且 $\angle BAC = \angle QAB$, 所以 $\triangle ABC \sim \triangle AQB$, 所以 $\angle ABC = \angle Q = \angle PAC$. 又因为 $\angle APC = \angle BPA$, 所以 $\triangle APC \sim \triangle BPA$, 所以 $\frac{AC}{BA} = \frac{PC}{PA}$. 因为 $AB = 2AC$, 所以 $\frac{PC}{PA} = \frac{1}{2}$. 因为 $PC = 2$, 所以 $PA = 4$.

(2) 过点 A 作 $AD \perp PC$ 于点 D .

解法 1 在(1)的条件下, 易知 $CP = 2, AP = 4$, 所以 $AC = AP = 4$, 所以 $CD = PD = 1$. 在 $\text{Rt} \triangle ACD$ 中, 由勾股定理, 得 $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{15}$, 所以 $S_{\triangle PAC} = \frac{1}{2} CP \cdot AD = \sqrt{15}$. 因为 $\triangle PAC \sim \triangle PBA$, 且 $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$, 所以 $S_{\triangle PAC} : S_{\triangle PBA} = 1 : 4$, 所以 $S_{\triangle PAB} = 4S_{\triangle PAC} = 4\sqrt{15}$, 所以 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle PAB} - S_{\triangle PAC} = 4\sqrt{15} - \sqrt{15} = 3\sqrt{15}$.

解法 2 同解法 1 可得 $AD = \sqrt{15}$, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = 3\sqrt{15}$.

22. (1) C (2) $\sqrt{5}$

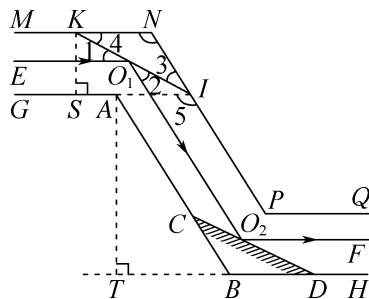
(3) **解:** 过点 O 作直径 BE , 连接 AE . 因为 BE 是直径, 所以 $\angle EAB = 90^\circ$. 因为 $\odot O$ 的半径为 5, 所以 $BE = 10$, 所以在 $\text{Rt} \triangle ABE$ 中, $AE = \sqrt{BE^2 - AB^2} = 6$. 因为 $CD = 6$, 所

以 $AE = CD$, 所以 $\widehat{AE} = \widehat{CD}$, 所以 $\widehat{AB}$ 与 $\widehat{CD}$ 的长度之和为 $\frac{1}{2} \times 10\pi = 5\pi$.

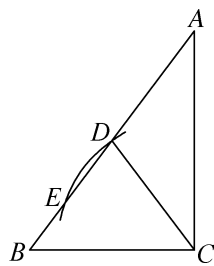
23. **解:** (1) 如图, 过点 K 作 $KS \perp AG$, 垂足为 S . 因为 $MN \parallel EO_1, O_1O_2 \parallel AB \parallel NP$, 所以 $\angle 1 = \angle 4, \angle 2 = \angle 3$. 由光的反射定律, 易得 $\angle 1 = \angle 2$, 所以 $\angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle MNP) = 29^\circ$. 因为 $MN \parallel GA$, 所以 $\angle KIS = \angle 4 = 29^\circ$. 在 $\text{Rt} \triangle KSI$ 中, $KI = \frac{KS}{\sin \angle KIS} \approx 10.4 \text{ cm}$.

答: 反光镜 KI 的长度约为 10.4 cm.

(2) 如图, 过点 A 作 $AT \perp BH$, 交 HB 的延长线于点 T . 因为 $MN \parallel GI$, 所以 $\angle 5 = \angle MNP = 122^\circ$. 因为 $AB \parallel NP$, 所以 $\angle GAB = \angle 5 = 122^\circ$. 因为 $GA \parallel BH$, 所以 $\angle GAB + \angle ABT = 180^\circ$, 所以 $\angle ABT = 58^\circ$. 在 $\text{Rt} \triangle ATB$ 中, $AT = AB \cdot \sin \angle ABT \approx 3.4 \text{ m}$. 答: 点 A 到直线 BH 的距离为 3.4 m.



24. **解:** (1) 如图, 点 E 即为所求.



(2) 连接 CE , 过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H . 因为在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $AC = 4, BC = 3$, 所以 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$. 因为 $\sin B = \frac{CH}{BC} = \frac{AC}{AB}$, 即 $\frac{CH}{3} = \frac{4}{5}$, 所以 $CH = \frac{12}{5}$. 在 $\text{Rt} \triangle BCH$

中,由勾股定理,得 $BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \frac{9}{5}$.

因为 D 为 AB 的中点, $\angle ACB = 90^\circ$, 所以 $CD = DB = \frac{5}{2}$, 所以 $DH = DB - BH = \frac{7}{10}$.

由作图,得 $CD = CE$, 而 $CH \perp AB$, 所以 $DE = 2DH = \frac{7}{5}$.

(3) $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{AC}{BC} \leq \sqrt{3}$ 且 $\frac{AC}{BC} \neq 1$. 提示: 连接 CE ,

过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H , 可知点 C 在以点 D 为圆心, DC 为半径的圆上. 当点 H 与点 D 重合时, 点 E 也与点 D 重合, 如图 1, 此时 $DA = DC = DB$, $CD \perp AB$, 所以 $\angle A = \angle ACD = \angle B = \angle BCD = 45^\circ$, 所以

$\triangle BCA$ 为等腰直角三角形, 所以 $\frac{AC}{BC} = 1$. ① 当点 C 沿

$\odot O$ 向下运动时, $AC > BC$, 此时 $\frac{AC}{BC} > 1$, 斜边 AB 上

存在两点 D, E , 满足 $CD = CE = \frac{1}{2}AB$; 当点 C 继续

向下运动, 点 E 与点 B 重合时, 如图 2, 此时 $CD = CE = DE$, 则 $\triangle CDB$ 为等边三角形, 所以 $\angle ABC =$

60° , 所以 $\tan 60^\circ = \frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$, 所以满足斜边 AB 上存

在两点到点 C 的距离等于 $\frac{1}{2}AB$ 时, $1 < \frac{AC}{BC} \leq \sqrt{3}$.

② 点 C 向上运动也符合条件, 此时 $AC < BC$, 则 $\frac{AC}{BC} <$

1 ; 当点 C 继续向上运动, 点 E 与点 A 重合时, 如图 3,

同上可求 $\angle BAC = 60^\circ$, 则 $\angle ABC = 30^\circ$, 所以

$\tan 30^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以满足斜边 AB 上存在两点到

点 C 的距离等于 $\frac{1}{2}AB$ 时, $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{AC}{BC} < 1$. 综上所述,

$\frac{AC}{BC}$ 的取值范围是 $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{AC}{BC} \leq \sqrt{3}$ 且 $\frac{AC}{BC} \neq 1$.

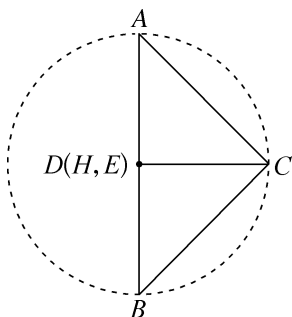


图 1

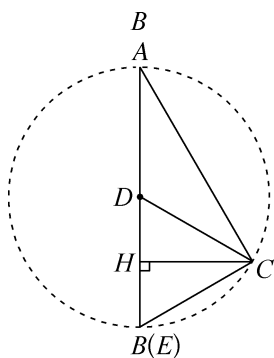


图 2

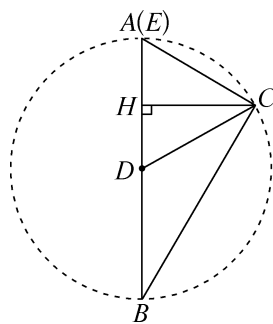


图 3

25. 解: 任务一 因为 $AB \parallel x$ 轴, $AB = 5$ cm, B 为水流抛物线的顶点, 所以抛物线的对称轴

为直线 $x = 5$, 所以 $-\frac{b}{2a} = 5$, 所以 $b = -10a$.

把点 $M(15, 0)$ 代入抛物线 $y = ax^2 + bx + 15$, 得 $15a + b + 15 = 0$, 把 $b = -10a$ 代入 $15a + b + 15 = 0$, 得 $15a - 10a + 15 = 0$, 解得

$a = -\frac{1}{5}$, $b = 2$. 所以水流抛物线的函数表达

式为 $y = -\frac{1}{5}x^2 + 2x + 15$.

任务二 不能. 圆柱形水杯最左端到点 O 的距离是 $15 - 3 = 12$ cm, 当 $x = 12$ 时, $y = -\frac{1}{5} \times$

$12^2 + 2 \times 12 + 15 = 10.2$. 因为 10.2 cm < 11 cm, 所以水流不能流到圆柱形水杯内.

任务三 当 $y = 11$ 时, $-\frac{1}{5}x^2 + 2x + 15 =$

11 , 解得 $x = 5 + 3\sqrt{5}$ 或 $x = 5 - 3\sqrt{5}$ (舍去). 因为圆柱形水杯的底面半径为 3 cm, 水杯的底面圆的圆心 P 在 x 轴上运动, 为了使水流能

流到圆柱形水杯内, 所以 $5 + 3\sqrt{5} - 3 < OP < 5 + 3\sqrt{5} + 3$, 即 $2 + 3\sqrt{5} < OP < 8 + 3\sqrt{5}$.

【解后反思】 本题打破传统的试题形式, 问题设计以任务为驱动, 貌似对学生有一定的挑战, 其实, 只要认真审题后, 不难发现, 就是一道二次函数的应用题. 由于已知抛物线的对称轴和抛物线上的一点坐标, 则可迅速地求出抛物线的函数表达式. 在解决任务时, 判断水流是否能流到圆柱形水杯内, 就是要求出 $x = 12$ 时的函数值, 再将函数值与水杯的高作比较. 任务三有一定的难度, 此时水杯的底面圆的圆心 P 在 x 轴上运动, 要使水流能流到圆柱形水杯内, 需要抓住运动过程中的临界状态, 即水杯在运

动过程中刚能使水流进入和离开的位置. 本题可谓是旧题新做,能迅速而准确地理解题意,将杯子的高度与纵坐标联系,将杯底范围与横坐标联系,做好文字与符号间的互译是解决问题的关键所在.

26. 解: (1) 因为 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$, $\angle A = 2\angle C$, $\angle D = 2\angle B$, 所以 $2\angle C + \angle B + \angle C + 2\angle B = 360^\circ$, 即 $3\angle B + 3\angle C = 360^\circ$, 所以 $\angle B + \angle C = 120^\circ$.

(2) **解法 1** 因为 $AB = AC$, 所以 $\angle ABC = \angle ACB$. 又因为四边形 $BDEC$ 是“倍对角四边形”, 所以 $\angle ABC + \angle ACB = 120^\circ$, 所以 $\angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 所以 $AB = AC = BC = 2$. 因为 $\angle DEC$, $\angle BDE$ 是“倍角”, 所以 $\angle DEC = \angle BDE = 120^\circ$, 所以 $\angle ADE = \angle AED = \angle DAE = 60^\circ$, 所以 $\triangle ADE$ 是等边三角形, 所以 $AD = DE$, 所以 $BD + DE = AD + BD = AB = 2$. 因为 $\triangle BCF$ 是等边三角形, 所以 $\angle BCF = 60^\circ$, $CF = BC = 2$, $\angle ECG = 60^\circ$, 所以 $\triangle ECG$ 是等边三角形, 所以 $CE = CG$. 因为 $FG = kAB$, 所以 $FG = 2k$, 所以 $CE = CG = FG - CF = 2k - 2$, 所以 $l = BD + DE + CE + BC = 2 + 2k - 2 + 2 = 2 + 2k$.

解法 2 延长 GD , FB 交于点 H , 易证 $\triangle ECG$, $\triangle DHB$ 是等边三角形, 所以 $BD = DH$, $EC = EG$, 所以 $\triangle FHG$ 也是等边三角形, 所以 $HG = FG = kAB = 2k$, 所以 $l = BD + DE + CE + BC = DH + DE + EG + BC = HG + BC = 2 + 2k$.

(3) **①解法 1** 因为四边形 $BDEC$ 是“倍对角四边形”, $\angle DEC = 2\angle DBC$, 所以 $\angle DBC + \angle ECB = 120^\circ$. 因为 $\triangle BCF$ 是等边三角形, 所以 $\angle BCF = 60^\circ$, 所以 $\angle ACB + \angle ECG = 120^\circ$, 所以 $\angle ABC = \angle ECG$, $\angle DEC = 2\angle ECG$. 又因为 $\angle DEC = \angle ECG + \angle G$, 所以 $\angle ECG = \angle G$, 所以 $CE = EG$.

解法 2 设 $\angle ACB = x$, 则 $\angle DBC = 120^\circ - x$. 因为 $\angle DEC = 2\angle DBC$, 所以 $\angle DEC =$

$240^\circ - 2x$. 因为 $\angle BCF = 60^\circ$, 所以 $\angle ECG = 120^\circ - x$. 因为 $\angle DEC = \angle ECG + \angle G$, 所以 $\angle G = 240^\circ - 2x - (120^\circ - x) = 120^\circ - x$, 所以 $\angle G = \angle ECG$, 所以 $CE = EG$.

② 延长 GD , FB 交于点 H . 同①可证, $DH = DB$, 所以 $BD + DE + CE = DH + DE + EG = HG$. 因为 $\angle DBC + \angle ECB = 120^\circ$, 所以 $\angle A = 60^\circ = \angle F$. 因为 $\angle DEC = 2\angle DBC = 2\angle G$, 所以 $\angle DBC = \angle G$, 所以 $\triangle ABC \sim \triangle FGH$, 所以 $\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{GH}$, 即 $\frac{AB}{kAB} = \frac{2}{GH}$, 所以 $GH = 2k$. 所以 $l = BD + DE + CE + BC = HG + BC = 2 + 2k$, 所以 $\frac{l}{k+1} = \frac{2+2k}{k+1} = 2$.

【解后反思】 本题是新定义题型,重在考查学生的现场学习力,需要经历对新概念的理解和应用过程. 首先要认真阅读,正确理解新定义的含义;然后再调用已学知识,结合新定义解决问题. 求 $\angle B + \angle C$ 的度数是对新定义的“倍对角四边形”以及“倍角”的理解基础上的简单应用,拓展提升中的问题设计遵循了由特殊到一般的规律. 第(1)问既可结合等边三角形的相关知识求出四边形 $BDEC$ 的周长,又可补全图形,通过延长 GD , FB 交于点 H , 将四边形 $BDEC$ 的周长转化为 BC 与 HG 的和,此法为第(2)问的②的解答设下铺垫. 第(2)问舍去“ $AB = AC$ ”,弱化了已知条件,结合定义理解以及三角形的相关知识,可证出①中的 $CE = EG$,这也是在为②中探究 $\frac{l}{k+1}$ 作铺垫. 问题②是本题的升华之笔,在有了前面的层层铺垫后,对于有一定数学思维能力的学生能够顺向迁移前面解题经验,容易想到将周长进行转化, CE 转化为 EG 的长,则 $l = BD + DG + BC$, BC 的长已知,只要表示出 $BD + DG$ 的和即可. 此时需要对 BD 的长进行转化,由于图中没有与 BD 相等的线段,所以需要进行构造,类比第①问的证明,想到将 GD 和 FB 延长,只要证明 $DH = BD$ 即可将 $BD + DG$ 转化为 HG 的长,且不难发现 $\triangle ABC \sim \triangle FGH$, 从而表示出周长 l .

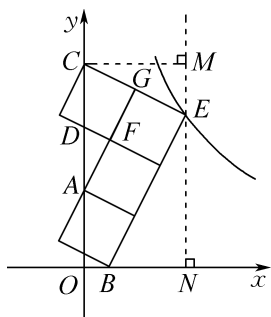
D34* 扬州市 2024 年中考模拟优化卷

1. B 2. A 3. B 4. B 5. C 6. C

7. C 提示:由题意知,中间长方形的宽为 $(8-2a)$. 因为围成的三棱柱形物体底面为三角形,所以可由三角

形三边关系,得 $a-a < 8-2a < a+a$, 解得 $2 < a < 4$.

8. B 提示:如图,过点 E 作 $EN \perp x$ 轴于点 N ,过点 C 作 $CM \perp EN$,交 NE 的延长线于点 M . 设小正方形的边长为 m . 因为 $DF \parallel CG$,所以 $\triangle ADF \sim \triangle ACG$,所以 $\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle ACG}} = \left(\frac{AF}{AG}\right)^2 = \frac{1}{4}$. 因为 $S_{\triangle ADF} = 1$,所以 $S_{\triangle ACG} = 4$,即 $\frac{1}{2}m \cdot 2m = 4$,解得 $m = 2$ (负值舍去). 所以 $AG = CE = 2m = 4$, $BE = 3m = 6$. 由勾股定理,得 $AC = \sqrt{CG^2 + AG^2} = 2\sqrt{5}$. 因为 $\angle ACM = \angle CME = \angle AGC = 90^\circ$,所以 $\angle ECM + \angle ACG = \angle ACG + \angle CAG = 90^\circ$,所以 $\angle ECM = \angle CAG$,所以 $\triangle ECM \sim \triangle CAG$,所以 $\frac{CM}{AG} = \frac{CE}{AC}$,即 $\frac{CM}{4} = \frac{4}{2\sqrt{5}}$,所以 $CM = \frac{8\sqrt{5}}{5}$. 同理可证 $\triangle CEM \sim \triangle EBN$,所以 $\frac{CM}{EN} = \frac{CE}{BE}$,所以 $EN = \frac{CM \cdot BE}{CE} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$,所以点 $E\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{12\sqrt{5}}{5}\right)$,所以 $k = \frac{8\sqrt{5}}{5} \times \frac{12\sqrt{5}}{5} = \frac{96}{5}$.



【解后反思】本题考查了反比例函数与几何的综合. 求 k 值即为求点 E 的坐标,仅有的条件是 $S_{\triangle ADF} = 1$, $\triangle ADF$ 的三边中有一边为小正方形的边长,尽管小正方形的边长未知,但图中以小正方形的边为边的还有 $\triangle ACG$,找到这个三角形是解决本题的突破口,因为这个三角形的两条直角边恰好都与小正方形的边长有关,先是借助 $\triangle ACG \sim \triangle ADF$,相似比为 2,求出 $\triangle ACG$ 的面积,进而求出小正方形的边长,从而 $\triangle ACG$ 的三边就可求,同时 CE 和 BE 的长也可求. 而含有边 CE 的 $\triangle CEM$ 与 $\triangle ACG$ 相似,含有边 BE 的 $\triangle EBN$ 与 $\triangle ACG$ 也相似,进而就可求出点 E 的坐标.

9. $x \neq 5$ 10. 4.39×10^5 11. 40° 12. 58°

13. $\frac{k}{10}$

14. 2 024 提示:因为 $|2\,023 - a| + \sqrt{a - 2\,024} = a$,而

$a - 2\,024 \geq 0$,即 $a \geq 2\,024$,则 $a - 2\,023 + \sqrt{a - 2\,024} = a$,所以 $\sqrt{a - 2\,024} = 2\,023$,即 $a - 2\,024 = 2\,023^2$,所以 $a - 2\,023^2 = 2\,024$.

15. -2 提示:解法 1 因为函数 $y = \frac{2}{x}$ 与 $y = -2x - 4$ 的图像的交点坐标为 (a, b) ,所以 $b = \frac{2}{a}$,即 $ab = 2$,
 $b = -2a - 4$,即 $2a + b = -4$,所以 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{b + 2a}{ab} = \frac{-4}{2} = -2$.

解法 2 由题意得 $\begin{cases} y = \frac{2}{x} & \text{①,} \\ y = -2x - 4 & \text{②,} \end{cases}$ 把①代入②得

$\frac{2}{x} = -2x - 4$,整理得 $x^2 + 2x + 1 = 0$,解得 $\begin{cases} x = -1, \\ y = -2, \end{cases}$ 所以交点坐标是 $(-1, -2)$,所以 $a = -1$,
 $b = -2$,所以 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = -1 + (-1) = -2$.

16. 4 提示:设圆锥的母线长为 l ,底面圆的半径为 r ,所以底面积为 πr^2 ,侧面积为 $\frac{1}{2} \times 2\pi r l = \pi r l$. 因为 $2\pi r = \frac{90\pi l}{180}$,所以 $r = \frac{1}{4}l$,所以 $\frac{\pi r l}{\pi r^2} = \frac{l}{r} = 4$,所以这个圆锥侧面积是底面积的 4 倍.

17. -5 提示:解法 1 因为 $2x^2 + bx + c$ 是关于字母 x 的二次三项式,所以 $b \neq 0$,所以 $2x^2 + bx + c = 2\left(x + \frac{b}{4}\right)^2 + c - \frac{b^2}{8} = 2(x - m)^2 - 3$,所以 $\frac{b}{4} = -m$,
 $c - \frac{b^2}{8} = -3$,即 $b = -4m$, $c = \frac{b^2}{8} - 3$. 所以 $b + c = \frac{b^2}{8} + b - 3 = \frac{1}{8}(b + 4)^2 - 5$. 因为 $\frac{1}{8} > 0$,所以当 $b = -4$ 时, $b + c$ 有最小值,最小值为 -5 . ($b + c$ 也可以表示为 $2m^2 - 4m - 3 = 2(m - 1)^2 - 5$,当 $m = 1$ 时,最小值为 -5)

解法 2 对于 $2x^2 + bx + c = 2(x - m)^2 - 3$,令 $x = 1$,则 $2 + b + c = 2(1 - m)^2 - 3$,所以 $b + c = 2(1 - m)^2 - 5 \geq -5$.

18. $2\sqrt{34}$ 提示:连接 OB, OD . 由题可知 $\triangle ABC, \triangle OBD$ 均为等腰直角三角形,所以 $\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{OB} = \sqrt{2}$. 因为 $\angle ABO + \angle ABD = \angle CBD + \angle ABD = 45^\circ$,所以 $\angle ABO = \angle CBD$,所以 $\triangle CDB \sim \triangle AOB$,所以 $\frac{CD}{OA} =$

$\frac{BC}{AB}=\sqrt{2}$, 所以 $CD=\sqrt{2}OA=4$, 所以 $AD=AC-CD=6$, 所以 $DE=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=2\sqrt{34}$.

【解后反思】辅助线的添加是解决本题的关键,同时也是难点.原图中的 OA 虽已知长度,但却与其他线段没有发生关联,因而可连 OB ,将 OA 置于 $\triangle OAB$ 中,再由 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,联想到连 OD ,这样 $\triangle OBD$ 也是等腰直角三角形,很自然地就可以证到 $\triangle CDB \sim \triangle AOB$,代入已知条件,可求 CD 的长,进而求得 AD 的长,由勾股定理求得 BD 的长,即为 DE 的长.

19. 解: (1) 原式 $=9-1+2-\sqrt{3}-3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}=7-\sqrt{3}$.

(2) 原式 $=\frac{1}{m} \div \frac{m-1-m}{m(m-1)}=\frac{1}{m} \cdot [-m(m-1)]=1-m$.

20. 解: 解 $1-x < 2(2x+3)$, 得 $x > -1$. 解 $\frac{5+x}{3} \geq x + \frac{1}{3}$, 得 $x \leq 2$. 所以原不等式组的解集为 $-1 < x \leq 2$, 正整数解为 1, 2.

21. 解: (1) 4.9 20

(2) 八年级学生的视力健康情况总体更好一些,理由如下:

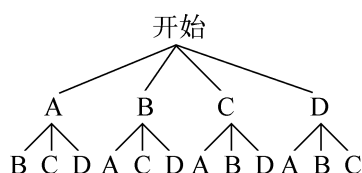
从平均数来看,两个年级一样;从众数和中位数来看,八年级均高于九年级,所以八年级学生的视力健康情况总体更好一些.

(3) $800 \times \frac{6}{20} = 240$ (人).

答:估计八年级学生视力正常的人数为 240.

22. 解: (1) $\frac{1}{4}$

(2) 将四部名著《周髀算经》,《九章算术》,《海岛算经》,《孙子算经》分别记为 A, B, C, D, 记恰好选中《九章算术》和《孙子算经》为事件 M. 根据题意可以画出如下的树状图:



由树状图可知,共有 12 种等可能的结果,其

中,满足事件 M 的结果有 2 种,即 (B, D),

(D, B), 所以 $P(M) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

23. 解: 设小客车有座位 x 个, 则大客车有座位 $(1+25\%)x$ 个. 根据题意, 得 $\frac{400}{x} -$

$\frac{400}{(1+25\%)x} = 2$, 解得 $x = 40$. 经检验, $x = 40$ 是原方程的解. 所以 $(1+25\%)x = 50$.

答: 大、小客车的乘客座位数分别为 50, 40.

24. (1) 证明: 因为 D, E 分别为 AB, AC 的中点, 所以 $DE = \frac{1}{2}BC$, $DE \parallel BC$. 因为 $CF =$

$\frac{1}{2}BC$, 所以 $DE = CF$, 所以四边形 DEFC 是平行四边形.

(2) 解: 过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H. 因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形, D 为 AB 的中点, 所以 $\angle B = 60^\circ$, $BD = \frac{1}{2}AB = 6$. 在 $Rt\triangle BDH$

中, $\angle BDH = 90^\circ - \angle B = 30^\circ$, 所以 $BH = \frac{1}{2}BD = 3$. 由勾股定理, 得 $DH =$

$\sqrt{BD^2 - BH^2} = 3\sqrt{3}$, 所以 $S_{\text{四边形DEFC}} = CF \cdot DH = \frac{1}{2}BC \cdot DH = 18\sqrt{3}$.

25. (1) 证明: 连接 BD. 因为 AB 是 $\odot O$ 的直径, 所以 $\angle ADB = 90^\circ$, 所以 $\angle CBD + \angle C = 90^\circ$. 由同弧所对的圆周角相等, 得 $\angle ABD = \angle AED$. 因为 $\angle C = \angle AED$, 所以 $\angle C = \angle ABD$, 所以 $\angle CBD + \angle ABD = 90^\circ$, 即 $AB \perp BC$, 所以 BC 为 $\odot O$ 的切线.

(2) 解: 连接 OE. 由三角形的内角和, 得 $\angle ADE = 180^\circ - \angle AED - \angle EAD = 40^\circ$, 所以 $\angle AOE = 2\angle ADE = 80^\circ$, 所以 $\angle BOE = 180^\circ - \angle AOE = 100^\circ$, 所以 $\widehat{BE}$ 的长为 $\frac{100 \times \pi \times 2}{180} = \frac{10\pi}{9}$.

26. 解: (1) 如图 1, 点 O 即为所求.

(2) ①如图 2, 点 O 即为所求.

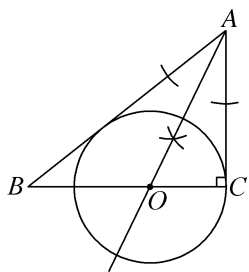


图 1

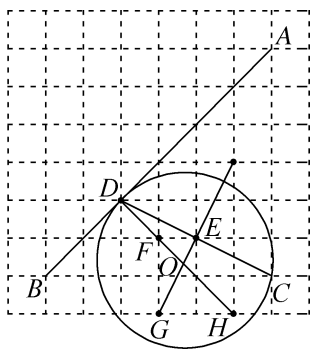


图 2

② $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ 提示:如图 2,连接 EF, GH . 易知 $EF \parallel GH$, 所以 $\triangle OEF \sim \triangle OGH$, 所以 $\frac{OE}{OG} = \frac{EF}{GH} = \frac{1}{2}$. 由勾股定理, 得 $GE = DE = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, 所以 $OE = \frac{1}{3}GE = \frac{\sqrt{5}}{3}$. 由①作法可知, $OE \perp DE$, 在 $\text{Rt}\triangle ODE$ 中, 由勾股定理, 得 $OD = \sqrt{OE^2 + DE^2} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

27. 解: (1) 对于 $y = -\frac{1}{12}x^2 + bx + c$, 将点 $A(0, 70)$, $P(30, 37.5)$ 代入, 得

$$\begin{cases} c=70, \\ -\frac{1}{12} \times 900 + 30b + c = 37.5, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} b = \frac{17}{12}, \\ c = 70. \end{cases}$$

所以 y 与 x 之间的函数表达式为 $y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{17}{12}x + 70$.

(2) ① 设 $x = k_1t + m$ ($k_1 \neq 0$). 将 $\begin{cases} t=0, \\ x=0, \end{cases} \begin{cases} t=5, \\ x=30 \end{cases}$ 分别代入, 得 $\begin{cases} m=0, \\ 5k_1+m=30. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k_1=6, \\ m=0. \end{cases}$ 所以 $x=6t$.

② 设直线 BC 的函数表达式为 $y = k_2x + d$ ($k_2 \neq 0$). 将点 $(0, 60)$, $(30, 37.5)$ 代入, 得

$$\begin{cases} d=60, \\ 30k_2+d=37.5, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} d=60, \\ k_2=-\frac{3}{4}, \end{cases} \text{所以直线}$$

BC 的函数表达式为 $y = -\frac{3}{4}x + 60$. 设运动员飞行过程中的某一位置点 M 的坐标为

$(x, -\frac{1}{12}x^2 + \frac{17}{12}x + 70)$, 过点 M 作 $MN \perp x$ 轴交 BC 于点 N , 则点 N 的坐标为 $(x, -\frac{3}{4}x + 60)$, 所以 $MN = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{13}{6}x + 10 = -\frac{1}{12}(x-13)^2 + 10 + \frac{169}{12}$. 因为 $-\frac{1}{12} < 0$, 所以当 $x=13$, 即 $6t=13$ 时, MN 最大, 解得 $t = \frac{13}{6}$.

【解后反思】本题的情境源于生活实际, 同时还体现了与物理学科的融合, 尤其是第二小问, 属于速度的分解, 将位移分解为水平位移和竖直位移. 整道题文字阅读量较大, 需要正确理解题意, 找出点 A 和点 P 的坐标, 进而求出 y 与 x 之间的函数表达式. 问题(2)②解题的关键是对于“运动员与着陆坡 BC 在竖直方向上的距离达到最大”的理解, 可能会被错误地认为是求 $y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{17}{12}x + 70$ 取最大值时 x 的值, 此时 y 的最大值是对 OB 而言, 而题目中清楚交待的是运动员与着陆坡 BC 在竖直方向上的最大距离, 也就是 MN 的最大值, 认真审题, 看懂题意, 是解决问题的关键所在.

28. (1) $2\sqrt{3}$

(2) 解: ① 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $BC = AC \cdot \tan \angle BAC = 6\sqrt{3}$, 所以 $BD = BC - CD = 4\sqrt{3}$. 因为 $DE \parallel AC$, 所以 $\angle EDA = \angle DAC$, $\angle DFM = \angle AGM$. 又因为 $AM = DM$, 所以 $\triangle DFM \cong \triangle AGM$, 所以 $AG = DF$. 因为 $DE \parallel AC$, 所以 $\triangle BEF \sim \triangle BAG$, 所以 $\frac{EF}{AG} = \frac{BE}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{2}{3}$, 所以 $\frac{EF}{DF} = \frac{2}{3}$.

② 过 C, P, G 三点作 $\odot Q$, 则 $PQ = CQ = GQ$. 因为 $\angle CPG = 60^\circ$, 所以 $\angle CQG = 120^\circ$, 所以 $\triangle CQG$ 是顶角为 120° 的等腰三角形, $\angle QCG = \angle QGC = 30^\circ$. 分情况讨论: (i) 如图 1, 当 $\odot Q$ 与 DE 相切于点 P ($\odot Q$ 与线段 DE 有唯一交点), 即 $PQ \perp DE$ 时, 延长 PQ 交 AC 于点 H , 则 $PH \perp AC$. 易证四边形 $PHCD$ 为矩形, 所以 $PH = CD = 2\sqrt{3}$. 设

$\odot Q$ 的半径为 r , 则 $QH = CQ \cdot \sin \angle QCG = \frac{r}{2}$,

$CH = CQ \cdot \cos \angle QCG = \frac{\sqrt{3}r}{2}$. 因为 $PQ + QH =$

PH , 即 $r + \frac{1}{2}r = 2\sqrt{3}$, 所以 $r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. 所以

$CH = \frac{\sqrt{3}r}{2} = 2$, 所以 $CG = 2CH = 4$, 所以

$AG = AC - CG = 2$. 因为 $DE \parallel AC$, 所以 $\triangle BDF \sim \triangle BCG$, $\triangle DFM \sim \triangle AGM$, 所以

$\frac{DF}{CG} = \frac{BD}{BC} = \frac{2}{3}$, $\frac{DM}{AM} = \frac{DF}{AG}$, 所以 $DF =$

$\frac{2}{3}CG = \frac{8}{3}$, $\frac{DM}{AM} = \frac{DF}{AG} = \frac{4}{3}$, 所以 $\frac{DM}{AD} =$

$\frac{DM}{DM+AM} = \frac{4}{7}$. 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, 由勾股定

理, 得 $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = 4\sqrt{3}$. 所以 $DM =$

$\frac{4}{7}AD = \frac{16\sqrt{3}}{7}$. 随着 $\odot Q$ 半径的增大, $\odot Q$ 与

线段 DE 有两个交点. (ii) 如图 2, 当 $\odot Q$ 经过点 E 时, 延长 CQ 交 AB 于点 K , 则 $\angle AKC = 180^\circ - \angle BAC - \angle QCG = 90^\circ$, 即

$CK \perp AB$. 在 $\text{Rt}\triangle ACK$ 中, $AK = AC \cdot \cos \angle BAC = 3$, $CK = AC \cdot \sin \angle BAC = 3\sqrt{3}$. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 30^\circ$, 所以

$AB = 2AC = 12$, 由①可知, $BE = \frac{2}{3}AB = 8$,

所以 $AE = AB - BE = 4$, 所以 $KE = AE - AK = 1$. 设 $\odot Q$ 的半径 $CQ = EQ = r$, 则

$KQ = CK - CQ = 3\sqrt{3} - r$. 在 $\text{Rt}\triangle KQE$ 中, 由勾股定理, 得 $KE^2 + KQ^2 = EQ^2$, 即 $1^2 +$

$(3\sqrt{3} - r)^2 = r^2$, 解得 $r = \frac{14\sqrt{3}}{9}$. 同理可得

$DM = \frac{14\sqrt{3}}{5}$. 随着 $\odot Q$ 半径的继续增大, $\odot Q$

与线段 DE 又只有一个交点. (iii) 如图 3, 当 $\odot Q$ 经过点 D , 即点 P 与点 D 重合时, 则 $\angle CDG = 60^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle CDG$ 中, $CG = CD \cdot \tan \angle CDG = 6 = AC$. 所以此时 A, G, M 三点

重合, 所以 $DM = AD = 4\sqrt{3}$. 随着 $\odot Q$ 半径的继续增大, $\odot Q$ 与线段 DE 将不再有交点.

综上所述, 当 $DM = \frac{16\sqrt{3}}{7}$ 或 $\frac{14\sqrt{3}}{5} < DM \leq$

$4\sqrt{3}$ 时, 满足条件的点 P 只有一个.

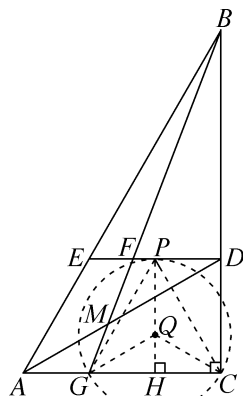


图 1

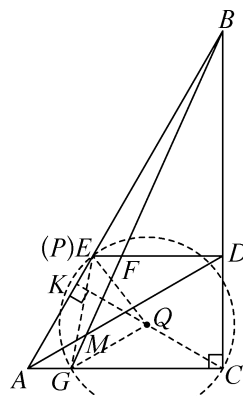


图 2

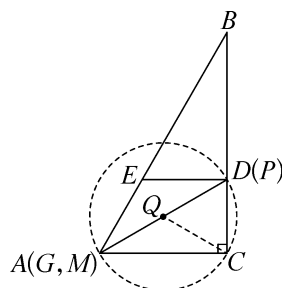


图 3

【解后反思】本题属于动态几何压轴题, 综合了相似三角形、解直角三角形、圆周角定理等知识, 解题的难点是问题(2)的第②问, 如何正确理解“在线段 DE 上恰好只有一点 P 使得 $\angle CPG = 60^\circ$ ”? 需要抓住两个关键词, 一是线段 DE , 二是恰好只有一个点, 用数学的语言表达就是过 C, P, G 三点的 $\odot Q$ 与线段 DE 只有一个交点, 很容易想到 $\odot Q$ 与 DE 相切, 但因为是与线段 DE 只有一个交点, 还会出现 $\odot Q$ 虽然与直线 DE 相交, 但其中只有一个交点在线段上, 也是满足条件的, 这时需要考虑临界状态: $\odot Q$ 经过点 E , $\odot Q$ 经过点 D , 再利用参数构建方程解决问题. 对于动态几何问题, 学会利用特殊位置求临界值是常用的解题策略.

D35 徐州市 2024 年中考模拟优化卷

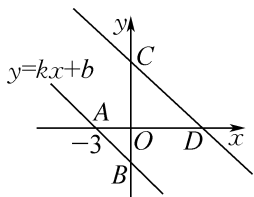
1. B 2. B 3. A 4. B

5. D 提示: 由图像可知, 快车单独行驶 4.5 h 行完全

程, 快车的速度为 $\frac{540}{4.5} = 120$ (km/h), 则慢车的速度为

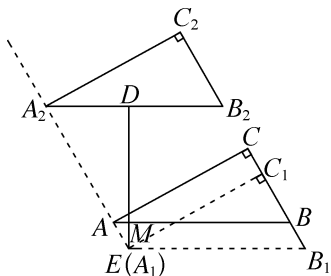
$$\frac{540}{3} - 120 = 60 (\text{km/h}).$$

6. C 提示:如图,直线 $y=kx-2b$ 与直线 $y=kx+b$ 平行,且点 $B(0,b)$, $C(0,-2b)$, $OC=2OB$. 因为 $\triangle AOB \sim \triangle DOC$, 所以 $\frac{OD}{OA} = \frac{OC}{OB}$. 因为点 $A(-3,0)$, 所以 $OA=3$, $OD=6$, 所以点 $D(6,0)$. 由图可知,不等式的解集为 $x < 6$.



7. D 提示:连接 AC, FC , 由折叠的性质可得 $CF \perp EB$, $CE=EF$. 又因为 $FM \perp BE$, 所以点 M 在线段 FC 上, $\angle EMF = \angle EMC = 90^\circ$. 易证 $\triangle EMF \cong \triangle EMC (\text{HL})$, 所以 $FM=MC$. 又因为 N 为 AF 的中点, 所以 MN 为 $\triangle ACF$ 的中位线, 所以 $MN = \frac{1}{2}AC$. 在 $\text{Rt} \triangle ACB$ 中, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{3}$, 所以 $MN = \sqrt{3}$.

8. D 提示:由题意可知, $\tan \angle MEA = \frac{AM}{ME} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\angle MEA = 30^\circ$, 所以当点 M 沿 ED 方向从点 E 运动到点 D 时, 点 A 的运动轨迹必须保证 $\angle MEA = 30^\circ$, 因此三角尺的运动轨迹如图所示. 点 C 运动的路径长为 C_1C_2 , 根据平移的性质, $C_1C_2 = A_1A_2$. 因为 $DE \perp AB$, 在 $\text{Rt} \triangle A_2DA_1$ 中, 所以 $\cos 30^\circ = \frac{DE}{A_1A_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 又因为 $DE=9$, 所以 $A_1A_2 = 6\sqrt{3}$. 所以点 C 运动的路径长为 $6\sqrt{3}$.



【解后反思】要善于转化问题. 本题根据三角尺 ABC 的边 AB 所在的直线与线段 ED 垂直, 且满足 $ME = \sqrt{3}MA$, 判断出三角尺平移的角度, 要求点 C 运动的路径长, 只需转化为求点 A 运动的路径长, 而 $\frac{DE}{A_2E} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则动点 M 的运动路径即是线段 $ED=9$, 由此即可求出从动点 A 运动的路径长.

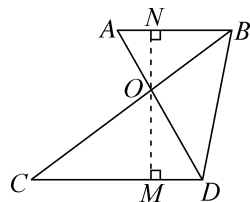
9. ± 7 10. 1.179×10^7 11. 92°

12. $m \leq 1$ 13. 88 14. 6

15. $\frac{2\pi}{3}$ 提示:连接 AC, CO . 由翻折易知, $AD=OD$, $CD \perp AO$. 又因为 $CA=CO$, $AO=CO$, 所以 $AC=CO=AO=2$, 所以 $\triangle AOC$ 为等边三角形, 所以 $\angle CAO = 60^\circ$, 所以 $l_{\widehat{AC}} = \frac{60\pi \times 2}{180} = \frac{2\pi}{3}$.

16. $\frac{4}{15}$ 提示:解法 1 如图,过点 O 作 $ON \perp AB$, 延长 NO 交 CD 于点 M . 易证 $\triangle AOB \sim \triangle DOC$, 所以 $\frac{OA}{OD} = \frac{AB}{DC} = \frac{2}{3}$. 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle A = \angle MDO$. 因为 $\angle AON = \angle DOM$, 所以 $\triangle AON \sim \triangle DOM$, 所以 $\frac{ON}{OM} = \frac{OA}{OD} = \frac{2}{3}$, 即 $3OA = 2OD$, $3AB = 2CD$, $3ON = 2OM$, $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot ON$, $S_{\triangle CDB} = \frac{1}{2}CD \cdot NM = \frac{1}{2}CD \cdot ON + \frac{1}{2}CD \cdot OM = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}AB \cdot ON + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}AB \cdot \frac{3}{2}ON = \frac{15}{8}AB \cdot ON$, 所以 $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle CDB}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot ON}{\frac{15}{8}AB \cdot ON} = \frac{4}{15}$.

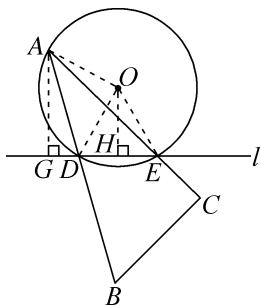
- 解法 2 易证 $\triangle AOB \sim \triangle DOC$, 所以 $\frac{AB}{DC} = \frac{AO}{DO} = \frac{2}{3}$, 所以 $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle DOC}} = \frac{AB^2}{CD^2} = \frac{4}{9}$. 令 $S_{\triangle AOB} = 4S$, 则 $S_{\triangle DOC} = 9S$. 因为 $\frac{S_{\triangle CDB}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{9S + S_{\triangle BOD}}{4S + S_{\triangle BOD}} = \frac{CD}{AB} = \frac{3}{2}$, 所以 $S_{\triangle BOD} = 6S$, 所以 $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle CDB}} = \frac{4S}{6S + 9S} = \frac{4}{15}$.



17. $24 + 4\sqrt{3}$ 提示:过点 C 作 $CD \perp x$ 轴于点 D . 由题意, 易得点 $A(4\sqrt{3}, 0)$, $B(0, 4)$, 所以 $OA = 4\sqrt{3}$, $OB = 4$, 所以 $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 8$, 所以 $\sin \angle BAO = \frac{OB}{AB} = \frac{1}{2}$, 所以 $\angle BAO = 30^\circ$. 易知 $\angle BAC = 90^\circ$, 所以 $\angle CAD = 180^\circ - \angle BAO -$

$\angle BAC = 60^\circ$. 因为 $AB = 2AC$, 所以 $AC = 4$. 因为 $CD \perp x$ 轴, 所以 $CD = AC \cdot \sin \angle CAD = 2\sqrt{3}$, $AD = AC \cdot \cos \angle CAD = 2$, 所以 $OD = OA + AD = 4\sqrt{3} + 2$, 所以点 $C(4\sqrt{3} + 2, 2\sqrt{3})$. 所以 $k = (4\sqrt{3} + 2) \times 2\sqrt{3} = 24 + 4\sqrt{3}$.

18. $(20 - 10\sqrt{3})$ 提示: 如图, 构造 $\triangle ADE$ 外接圆, 圆心为 O , 半径为 r , 过定点 A 作 $AG \perp l$ 于点 G , 过圆心 O 作 $OH \perp l$ 于点 H , 连接 OD, OE, OA , 则 $OA = OD = OE = r$. 因为 $\angle BAC = 30^\circ$, 所以 $\angle DOE = 60^\circ$, 所以 $\triangle ODE$ 为等边三角形, 所以 $DE = OD$. 因为 $OH \perp l$, 所以 $\angle DOH = \angle EOH = 30^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle OHD$ 中, $OH = OD \cdot \cos \angle DOH = \frac{\sqrt{3}}{2} OD = \frac{\sqrt{3}}{2} r$. 因为 $OA + OH \geq AG$, 即 $r + \frac{\sqrt{3}}{2} r \geq 5$, 所以 $r \geq 20 - 10\sqrt{3}$. 当点 H 与点 G 重合时, r 取得最小, 所以 $r_{\min} = 20 - 10\sqrt{3}$, 即 OD 最小值为 $20 - 10\sqrt{3}$. 因为 $DE = OD$, 所以 DE 最小值为 $20 - 10\sqrt{3}$.



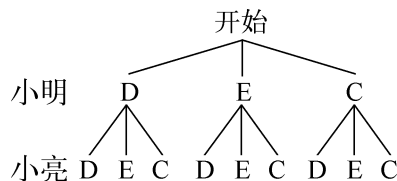
【解后反思】构造 $\triangle ADE$ 外接圆是解决定角问题的常见策略, 利用 $OA + OH \geq AG$ 构造不等式, 即可求得线段 DE 长的最小值.

19. 解: (1) 原式 $= -1 + 9 - 2 - 1 = 5$.
 (2) 原式 $= \frac{(a-3)^2}{a-6} \cdot \frac{a-6}{a-3} = a - 3$.
 20. 解: (1) 移项, 得 $x^2 + 2x = 1$. 配方, 得 $x^2 + 2x + 1 = 1 + 1$, $(x + 1)^2 = 2$. 解得 $x_1 = \sqrt{2} - 1$, $x_2 = -\sqrt{2} - 1$.
 (2) 解 $x + 3 > 2x$, 得 $x < 3$. 解 $3x + 7 \geq 1$, 得 $x \geq -2$. 所以原不等式组的解集是 $-2 \leq x < 3$.
 21. 证明: (1) 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 $AB = CD$, $AB \parallel CD$, $OB = OD$, 所以

$\angle ABM = \angle CDN$. 因为 M, N 分别是 OB, OD 的中点, 所以 $BM = DN$. 在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle CDN$ 中, $\begin{cases} AB = CD, \\ \angle ABM = \angle CDN, \\ BM = DN, \end{cases}$ 所以

$\triangle ABM \cong \triangle CDN$ (SAS).

- (2) 因为 $\triangle ABM \cong \triangle CDN$, 所以 $AM = CN$, $\angle AMB = \angle CND$, 所以 $\angle AMO = \angle CNO$, 所以 $AM \parallel CN$, 所以四边形 $AMCN$ 是平行四边形.
 22. 解: (1) 50 (2) 补全条形统计图略 (3) 36°
 (4) $1300 \times \frac{20}{50} = 520$ (人).
 答: 估计喜欢“C. 徐州胡辣汤”的学生有 520 人.
 23. (1) $\frac{1}{2}$
 (2) 解: 画树状图如下:



- 共有 9 种等可能的结果, 其中小明和小亮都从 C 出口走出的结果有 1 种, 所以小明和小亮都从 C 出口走出动物园的概率是 $\frac{1}{9}$.
 24. 解: 设矩形的宽为 x 步, 则矩形的长为 $(x + 12)$ 步. 依题意, 得 $x(x + 12) = 864$, 解得 $x = 24$ 或 $x = -36$ (舍去), 所以 $x + 12 = 24 + 12 = 36$, 所以矩形的宽为 24 步, 长为 36 步.
 答: 该矩形田地的宽为 24 步, 长为 36 步.
 25. 解: 过点 D 作 $DH \perp AF$ 于点 H , 设 $DH = x$ m. 因为在 $\text{Rt}\triangle DFH$ 中, $\tan \angle DFH = \tan 45^\circ = \frac{DH}{FH} = 1$, 所以 $FH = DH = x$ m. 因为 $EF = 2$ m, 所以 $EH = FH - EF = (x - 2)$ m. 在 $\text{Rt}\triangle DEH$ 中, $\tan \angle DEH = \tan 53^\circ = \frac{DH}{EH} \approx 1.33$, 所以 $\frac{x}{x-2} = 1.33$, 解得 $x =$

8.1(经检验是原方程的解).

答:灯管点 D 距地面 AF 的高度约为 8.1 m.

26. 解:(1) 该圆的圆心 O 如图 1 所示.

(2) $\triangle ADE$ 如图 2 所示.

(3) $\odot O$ 如图 3 所示. 提示:作 $\angle B$ 的平分线交 AC 于一点,即为圆心 O .

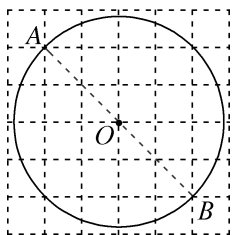


图 1

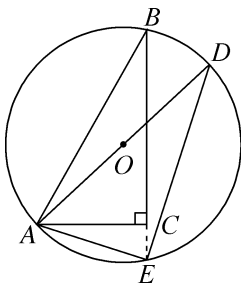


图 2

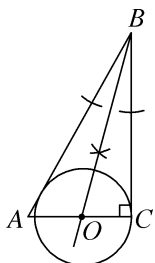


图 3

27. (1) $\frac{1}{4}$

(2) 解:如图 1,取 AF 的中点 G , CE 的中点 H , BD 的中点 I ,连接 DG , FH , EI . 易证 $\frac{AG}{AC} = \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{AD}{AB} = \frac{AG}{AC} = \frac{1}{3}$. 又因为 $\angle DAG = \angle BAC$, 所以 $\triangle DAG \sim \triangle BAC$, 所以

$$\frac{S_{\triangle DAG}}{S_{\triangle BAC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{1}{9}, \text{ 即 } S_{\triangle DAG} = \frac{1}{9} S_{\triangle BAC}.$$

因为 $AF = 2AG$, 所以 $S_{\triangle DAF} = 2S_{\triangle DAG} = \frac{2}{9} S_{\triangle BAC}$. 同理可证 $S_{\triangle BDE} = \frac{2}{9} S_{\triangle BAC}$, $S_{\triangle CEF} =$

$$\frac{2}{9} S_{\triangle BAC}, \text{ 所以 } S_{\triangle DEF} = S_{\triangle BAC} - S_{\triangle DAF} -$$

$$S_{\triangle BDE} - S_{\triangle CEF} = \left(1 - 3 \times \frac{2}{9}\right) S_{\triangle BAC} = \frac{1}{3} S_{\triangle BAC}.$$

综上所述, $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比是定值, 定值为 $\frac{1}{3}$.

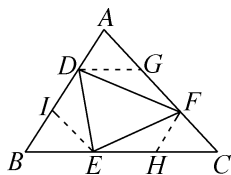


图 1

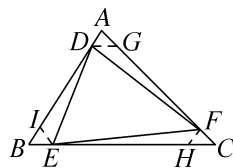


图 2

(3) $\frac{n^2 - 3n + 3}{n^2}$ 提示:如图 2,取 G, H, I 分别是

$\triangle ABC$ 三边的 n 等分点, 且 $\frac{BI}{AB} = \frac{CH}{BC} = \frac{AG}{CA} = \frac{1}{n}$, 连

接 DG, FH, EI . 易证 $AG = \frac{1}{n-1} AF$. 因为 $\frac{AD}{AB} =$

$\frac{AG}{AC} = \frac{1}{n}$, $\angle DAG = \angle BAC$, 所以 $\triangle DAG \sim \triangle BAC$, 所

以 $\frac{S_{\triangle DAG}}{S_{\triangle BAC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$, 即 $S_{\triangle DAG} = \frac{1}{n^2} S_{\triangle BAC}$. 因为

$AG = \frac{1}{n-1} AF$, 所以 $S_{\triangle DAF} = (n-1) S_{\triangle DAG} =$

$\frac{n-1}{n^2} S_{\triangle BAC}$. 同理可证 $S_{\triangle BDE} = \frac{n-1}{n^2} S_{\triangle BAC}$, $S_{\triangle CEF} =$

$\frac{n-1}{n^2} S_{\triangle BAC}$, 所以 $S_{\triangle DEF} = S_{\triangle BAC} - S_{\triangle DAF} - S_{\triangle BDE} -$

$S_{\triangle CEF} = \left(1 - 3 \times \frac{n-1}{n^2}\right) S_{\triangle BAC} = \frac{n^2 - 3n + 3}{n^2} S_{\triangle BAC}$, 所以

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{n^2 - 3n + 3}{n^2}.$$

28. 解:(1) 因为抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 的顶点坐

标为 $F(-1, 4)$, 所以 $\begin{cases} -\frac{b}{2 \times (-1)} = -1, \\ 4 \times (-1) \cdot c - b^2 = 4, \end{cases}$ 解

得 $\begin{cases} b = -2, \\ c = 3, \end{cases}$ 所以抛物线的函数表达式为

$$y = -x^2 - 2x + 3.$$

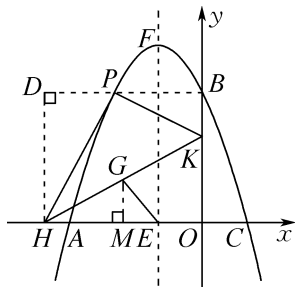
(2) 如图,连接 BP . 因为抛物线的函数表达式为 $y = -x^2 - 2x + 3$, 点 $P(-2, 3)$, 当 $x =$

0 时, 得 $y = 3$, 所以点 $B(0, 3)$, 所以 $BP \parallel x$ 轴, 即 $BP \perp y$ 轴. 过点 H 作 $HD \perp PB$ 的

延长线于点 D , 过点 G 作 $GM \perp x$ 轴于点 M . 因为 $\angle BOH = 90^\circ$, 所以四边形 $OBDH$ 是矩

形, 所以 $HD = OB = 3$. 因为 $\angle HDP = \angle HPK = \angle PBK = 90^\circ$, 所以 $\angle HPD + \angle KPB = 90^\circ$, $\angle KPB + \angle PKB = 90^\circ$, 所以 $\angle HPD = \angle PKB$. 所以 $\triangle HDP \sim \triangle PBK$,

所以 $\frac{HD}{PB} = \frac{DP}{BK}$, 即 $\frac{3}{2} = \frac{DP}{BK}$, 所以 $DP = \frac{3}{2}BK$. 设 $BK = x$, 则 $DP = \frac{3}{2}x$, 所以 $OH = DB = DP + PB = \frac{3}{2}x + 2$, $OK = OB - BK = 3 - x$, 所以点 $K(0, 3 - x)$, $H(-2 - \frac{3}{2}x, 0)$. 因为 G 是 HK 的中点, 所以点 $G(-1 - \frac{3}{4}x, \frac{3 - x}{2})$. 因为点 $E(-1, 0)$, $GM \perp x$ 轴, 所以点 $M(-1 - \frac{3}{4}x, 0)$. 在 $Rt\triangle GME$ 中, $GM = \frac{3 - x}{2}$, $EM = -1 - (-1 - \frac{3}{4}x) = \frac{3}{4}x$, 所以 $EG = \sqrt{GM^2 + ME^2} = \sqrt{(\frac{3 - x}{2})^2 + (\frac{3x}{4})^2} = \sqrt{\frac{13}{16}(x - \frac{12}{13})^2 + \frac{81}{52}}$. 因为 $\frac{13}{16} > 0$, 所以当 $x = \frac{12}{13}$ 时, EG 的值最小, 最小值为 $\frac{9\sqrt{13}}{26}$.



(3) 存在. 令 $y = -x^2 - 2x + 3 = 0$, 解得 $x = -3$ 或 $x = 1$, 所以点 $A(-3, 0)$, $B(0, 3)$. 设点 $N(n, -n^2 - 2n + 3)$, 则 $AB^2 = OA^2 + OB^2 = 3^2 + 3^2 = 18$, $AN^2 = [n - (-3)]^2 + (-n^2 - 2n + 3 - 0)^2 = (n + 3)^2 + (n^2 + 2n - 3)^2$, $BN^2 = (n - 0)^2 + (-n^2 - 2n + 3 - 3)^2 = n^2 + (n^2 + 2n)^2$. 因为 A, B, M, N 四点构成的四边形是矩形, 所以 $\triangle ABN$ 是直角三角形. 分情况讨论: ①若 AB 是斜边, 则 $AB^2 = AN^2 + BN^2$, 即 $18 = (n + 3)^2 + (n^2 + 2n - 3)^2 + n^2 + (n^2 + 2n)^2$. 因为当 $n = 0$ 或 $n =$

-3 时, 也满足上式, 故可整理, 得 $n(n + 3) \cdot (n^2 + n - 1) = 0$, 解得 $n_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, $n_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, $n_3 = 0$ (舍去), $n_4 = -3$ (舍去), 此时点 N 的横坐标为 $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$; ②若 AN 是斜边, 则 $AN^2 = AB^2 + BN^2$, 即 $(n + 3)^2 + (n^2 + 2n - 3)^2 = 18 + n^2 + (n^2 + 2n)^2$, 解得 $n = -1$ 或 $n = 0$ (舍去), 此时点 N 的横坐标为 -1 ; ③若 BN 是斜边, 则 $BN^2 = AB^2 + AN^2$, 即 $n^2 + (n^2 + 2n)^2 = 18 + (n + 3)^2 + (n^2 + 2n - 3)^2$, 解得 $n = 2$ 或 $n = -3$ (舍去), 此时点 N 的横坐标为 2 . 综上所述, 点 N 的横坐标为 $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ 或 -1 或 2 .

【解后反思】 本题第(3)问用了“化归转化”的思想, 关键在于将题目所找的矩形转化为直角三角形. 由题可知 A, B 为定点, 点 N 在抛物线上, 故而可将问题转化为求满足 $\triangle ABN$ 为直角三角形的点 N 的横坐标. 根据求什么设什么的思想, 设点 N 的横坐标为 n , 利用勾股定理即可列出关于 n 的方程. 需要注意分类讨论, 即以点 A, B, N 为顶点的直角三角形有三种情况. 情况①求解方程时, 易知点 N 与点 A 或点 B 重合时必然满足方程, 即 $n = 0$ 或 $n = -3$ 是方程的解, 以此可将方程分解因式, 转化为易于求解的一元二次方程.

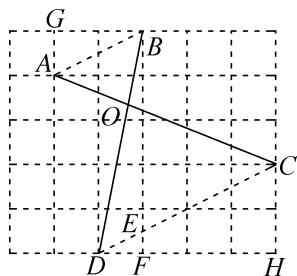
D36* 宿迁市 2024 年中考模拟优化卷

1. B 2. C 3. B 4. B 5. C

6. B 提示: 当 $x = -4$ 时, $y = -4m + 4m + 3 = 3$, 即此一次函数的图像经过定点 $(-4, 3)$. 因为点 $(-4, 3)$ 位于第二象限, 所以这个函数的图像一定经过第二象限.

7. A 提示: 连接 AB, CD , 并标注字母如图所示. 根据题意可知, $AG = 1$, $BG = 2$, $CH = 2$, $DH = 4$. 因为 $\angle AGB = \angle CHD = 90^\circ$, $\frac{AG}{CH} = \frac{BG}{DH} = \frac{1}{2}$, 所以 $\triangle ABG \sim \triangle CDH$, 所以 $\angle ABG = \angle CDH$, $\frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$. 所以

$\angle ABE = \angle DEF$, 所以 $AB \parallel CD$. 所以 $\triangle ABO \sim \triangle CDO$, 所以 $\frac{AO}{CO} = \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$, 所以 $AO = \frac{1}{3}AC$. 根据勾股定理, 得 $AC = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$, 所以 $AO = \frac{\sqrt{29}}{3}$.



8. D 提示: 作 $EG \perp OB$ 交 OB 于点 G . 因为矩形

$AOBC$ 的对角线 $OC = 5$, $\tan \angle BOC = \frac{3}{4}$, 所以 $BC =$

3 , $OB = 4$, 即点 $C(4, 3)$. 因为点 E, F 分别在 AC, BC

上, 且在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 上, 所以点

$E(\frac{k}{3}, 3), F(4, \frac{k}{4})$. 所以 $EM = EC = 4 - \frac{k}{3}, MF =$

$CF = 3 - \frac{k}{4}, BF = \frac{k}{4}$. 因为 $\angle GEM + \angle EMG = 90^\circ$,

$\angle BMF + \angle EMG = 90^\circ$, 所以 $\angle GEM = \angle BMF$. 因为

$\angle EGM = \angle MBF = 90^\circ$, 所以 $\triangle EGM \sim \triangle MBF$, 所以

$\frac{EG}{MB} = \frac{EM}{MF}$, 即 $\frac{3}{MB} = \frac{4 - \frac{k}{3}}{3 - \frac{k}{4}}$, 解得 $MB = \frac{9}{4}$. 又因为

$MB^2 + BF^2 = MF^2$, 即 $(\frac{9}{4})^2 + (\frac{k}{4})^2 = (3 - \frac{k}{4})^2$, 解

得 $k = \frac{21}{8}$.

【解后反思】本题考查矩形的性质, 相似三角形的判定及性质, 勾股定理, 已知正切值求边长及反比例函数图像上点的坐标特征. 解题的关键是求出 $BC = 3, OB = 4$, 表示出点 E, F 的坐标, 本题的难点是通过 EM 和 MF 之比算出 MB 的长, 由于 EM 和 MF 中含字母, 所以容易误以为不能求出相似比, 关键是要将式子进行化简.

9. 3 (答案不唯一, 只要 $a \leq 3$ 即可)

10. 9.02×10^6 11. $b(a+1)(a-1)$ 12. 8

13. $\frac{5}{2}$ 14. 20π 15. $\begin{cases} x+4.5=y, \\ x-1=\frac{1}{2}y \end{cases}$

16. -384 提示: 由题意可知, 这列数的第 n 个数可以

表示为 $(-2)^{n-1}$. 因为其中某三个相邻数的积是 4^{12} , 所以设这三个相邻的数分别为 $(-2)^{n-1}, (-2)^n, (-2)^{n+1}$, 则 $(-2)^{n-1} \cdot (-2)^n \cdot (-2)^{n+1} = 4^{12}$, 即 $(-2)^{3n} = (2^2)^{12} = 2^{24}$, 解得 $n = 8$, 所以这三个数的和是 $(-2)^7 + (-2)^8 + (-2)^9 = (-2)^7 \times (1 - 2 + 4) = -384$.

17. (3, 0) 或 (4, 0) 提示: ①当 $k = 0$ 时, 函数表达式为

$y = -x - 3$, 此时函数的图像与 x 轴只有一个交点成

立. 当 $y = 0$ 时, 可得 $x = -3$, 所以 $y = -x - 3$ 与 x 轴

的交点坐标为 $(-3, 0)$. 根据题意, 可得它的“Y 函数”

图像与 x 轴的交点坐标为 $(3, 0)$; ②当 $k \neq 0$ 时, 因为

函数 $y = \frac{k}{4}x^2 + (k-1)x + k-3$ 的图像与 x 轴只有

一个交点, 所以 $(k-1)^2 - 4 \cdot \frac{k}{4} \cdot (k-3) = 0$, 解得

$k = -1$, 所以函数表达式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x - 4$. 当

$y = 0$ 时, 解得 $x = -4$. 根据题意, 可得它的“Y 函数”

图像与 x 轴的交点坐标为 $(4, 0)$. 综上所述, 它的“Y

函数”图像与 x 轴的交点坐标为 $(3, 0)$ 或 $(4, 0)$.

【解后反思】本题考查了轴对称, 一次函数与坐标轴的交点, 抛物线与 x 轴的交点问题, 理解题意, 进行分类讨论是解题的关键. 本题容易忽略 $k = 0$ 的情况, k 的不同会产生不同的函数, 一次函数也符合与 x 轴有一个交点的要求, 平时应注意训练学生思考问题的全面性, 对各类函数的性质要有系统的认识.

18. $\frac{4}{9}$ 提示: 根据题图 1 可得 $AB^2 + BC^2 = AC^2$, 由题

图 1、图 2 两个图形可得正方形 $ABFG$ 与正方形

$BCDE$ 的面积和为 $AB^2 + BC^2 = AC^2$, 四边形 $ACPQ$

的面积为 AC^2 . 根据两个图形对应, $BH \perp AJ$, 则题图

2 中可得 $\angle ACP = \angle CPQ = \angle Q = \angle QAC = 90^\circ$, 所以

四边形 $ACPQ$ 为矩形. 又因为矩形 $ACPQ$ 的面积为

AC^2 , 所以 $AC = CP$, 所以四边形 $ACPQ$ 为正方形. 因

为 $\frac{CM}{PM} = \frac{6}{7}$, 设 $CM = 6a, PM = 7a$, 则 $PQ = AC =$

$CP = 13a$. $AI = AL = CM = 6a, KL = AB, MK = BC$.

设 $CK = x$, 则 $AK = 13a - x$. 所以 $MK =$

$\sqrt{CM^2 + CK^2} = \sqrt{36a^2 + x^2}, KL = \sqrt{AL^2 + AK^2} =$

$\sqrt{36a^2 + (13a - x)^2}$. 因为 $AC^2 = AB^2 + BC^2 = KL^2 +$

MK^2 , 所以 $(13a)^2 = 36a^2 + (13a - x)^2 + 36a^2 + x^2$, 整

理, 得 $x^2 - 13ax + 36a^2 = 0$, 解得 $x = 4a$ 或 $x = 9a$ (舍

去). 所以 $PN = CK = 4a$, $QN = PQ - PN = 13a -$

$$4a = 9a, \text{ 所以 } \frac{PN}{NQ} = \frac{4a}{9a} = \frac{4}{9}.$$

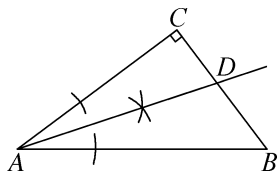
【解后反思】 本题考查了解一元二次方程和勾股定理. 学生解题时会默认 $ACPQ$ 为正方形, 但是严格的证明是必要的. 由比值设 $CM = 6a$, $PM = 7a$, 难点是设 $CK = x$, 从而表示出 $AK = 13a - x$, 再依次表示出 MK, KL , 根据勾股定理建立方程, 转化为 x 和 a 之间的数量关系. 也可以设 $BI = x$, $HI = y$, $AI = 6a$, $JI = 7a$, 可得 $xy = 36a^2$, $x + y = 13a$, 算得的结果相同.

19. 解: 原式 $= 2 + 1 - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 3 - \sqrt{3}$.

20. 解: 解 $x - 2(x - 1) \geq -3$, 得 $x \leq 5$. 解 $\frac{1+x}{3} < x - 1$, 得 $x > 2$. 所以不等式组的解集为 $2 < x \leq 5$, 在数轴上表示如下.



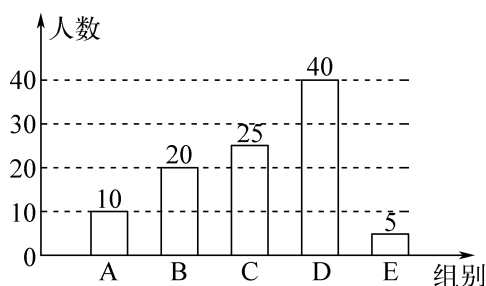
21. (1) 解: 如图, $\angle A$ 的平分线 AD 即为所作.



(2) 证明: 过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F . 因为 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线, $DC \perp AC$, $DF \perp AB$, 所以 $DC = DF$. 在 $\text{Rt} \triangle ADC$ 和 $\text{Rt} \triangle ADF$ 中, $\begin{cases} AD = AD, \\ DC = DF, \end{cases}$ 所以 $\text{Rt} \triangle ADC \cong \text{Rt} \triangle ADF$ (HL), 所以 $AC = AF$. 因为 $\angle AED + \angle B = 180^\circ$, $\angle AED + \angle DEC = 180^\circ$, 所以 $\angle DEC = \angle B$. 在 $\triangle DEC$ 和 $\triangle DBF$ 中, $\begin{cases} \angle DEC = \angle B, \\ \angle C = \angle DFB, \\ DC = DF, \end{cases}$ 所以 $\triangle DEC \cong \triangle DBF$ (AAS), 所以 $CE = FB$. 所以 $AB = AF + FB = AC + CE$.

22. 解: (1) 100 补全条形统计图如下:

每天完成书面作业时间条形统计图



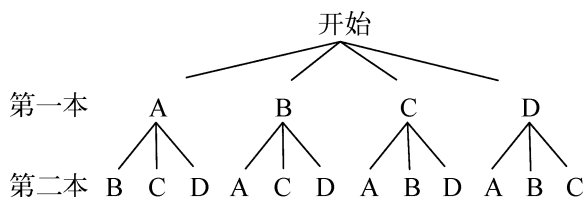
(2) 72

(3) $1800 \times \frac{100-5}{100} = 1710$ (人).

答: 估计该校每天完成书面作业不超过 90 min 的学生有 1 710 人.

23. (1) $\frac{1}{4}$

(2) 解: 《三国演义》《水浒传》《红楼梦》《西游记》分别记为 A, B, C, D, 画树状图如下:



从中任意抽取两本书, 共有 12 种不同的情况, 其中抽到《西游记》有 6 种情况, 所以抽到《西游记》的概率为 $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

24. 解: (1) 在 $\text{Rt} \triangle DCE$ 中, $\angle DCE = 30^\circ$, $CD = 12$ m, 所以 $DE = \frac{1}{2} CD = 6$ m.

(2) 设 $AB = h$ m. 在 $\text{Rt} \triangle DCE$ 中, $EC = CD \cdot \cos \angle DCE = 6\sqrt{3}$ (m). 在 $\text{Rt} \triangle BCA$ 中, $CA = \frac{AB}{\tan \angle BCA} = h$ (m). 所以 $EA = CA + EC = (h + 6\sqrt{3})$ m. 过点 D 作 $DF \perp AB$, 垂足为 F . 根据题意, 得 $\angle AED = \angle FAE = \angle DFA = 90^\circ$, 所以四边形 $DEAF$ 是矩形. 所以 $DF = EA = (h + 6\sqrt{3})$ m, $FA = DE = 6$ m. 可得 $BF = AB - FA = (h - 6)$ m. 在 $\text{Rt} \triangle BDF$ 中, $BF = DF \cdot \tan \angle BDF$, 即 $h - 6 = (h + 6\sqrt{3}) \cdot \tan 39^\circ$, 解得 $h = 71$.

答:塔 AB 的高度约为 71 m.

25. 解:(1) 直线 CD 与 $\odot O$ 相切. 理由如下:

连接 OC, 则 $OA = OC$, 所以 $\angle OAC = \angle OCA$. 因为 $CD = BD$, 所以 $\angle DCB = \angle DBC$. 因为 $\angle DBC + \angle OAC = 90^\circ$, 所以 $\angle DCB + \angle OCA = 90^\circ$, 所以 $\angle OCD = 90^\circ$. 因为 OC 为 $\odot O$ 的半径, 所以 CD 与 $\odot O$ 相切.

(2) 设 $\odot O$ 的半径为 r . 因为 $\tan \angle ODC = \frac{OC}{CD} = \frac{r}{CD} = \frac{24}{7}$, 所以 $BD = CD = \frac{7r}{24}$, 所以 $OD = \sqrt{OC^2 + CD^2} = \frac{25r}{24}$. 因为 $OB = OD + BD = 32$, 所以 $\frac{25r}{24} + \frac{7r}{24} = 32$, 解得 $r = 24$.

26. 解:(1) 29

(2) 设乙同学接温水所用的时间为 a s, 接开水所用的时间为 b s. 根据题意, 得
$$\begin{cases} 20a + 15b = 480, \\ a + b = 27, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 15, \\ b = 12. \end{cases}$$
 答: 乙同学接温水所用的时间为 15 s, 接开水所用的时间为 12 s.

(3) 方案一: 温水为 $20x$ mL, 开水为 $(700 - 20x)$ mL. 设转化后的温度为 t_1 . 依题意, 得 $(700 - 20x) \times (100 - t_1) = 20x \cdot (t_1 - 30)$, 解得 $t_1 = 100 - 2x$.

方案二: 开水为 $15x$ mL, 温水为 $(700 - 15x)$ mL. 设转化后的温度为 t_2 . 依题意, 得 $15x \cdot (100 - t_2) = (700 - 15x) \times (t_2 - 30)$, 解得 $t_2 = 1.5x + 30$.

当 $t_1 = t_2$ 时, $100 - 2x = 1.5x + 30$, 解得 $x = 20$; 当 $t_1 < t_2$ 时, $100 - 2x < 1.5x + 30$, 解得 $x > 20$; 当 $t_1 > t_2$ 时, $100 - 2x > 1.5x + 30$, 解得 $x < 20$. 综上所述, 当 $x < 20$ 时, 方案一温度更高; 当 $x = 20$ 时, 两种方案一样高; 当 $x > 20$ 时, 方案二温度更高.

27. (1) 解: 过点 D 作 $DH \parallel AC$ 交 BE 于点 H, 则 $\triangle BDH \sim \triangle BCE$, 因为 D 是 BC 的中点,

所以 $BD = \frac{1}{2} BC$. 所以 $\frac{BH}{BE} = \frac{DH}{CE} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2}$, 所以 $DH = \frac{1}{2} CE$, $BH = \frac{1}{2} BE$, 所以 $BH = HE$. 因为 E 是 AC 的一个三等分点, 且 $AE = \frac{1}{3} AC$, 所以 $AE = \frac{1}{2} CE$, 所以 $DH = AE$. 又因为 $DH \parallel AC$, 所以 $\angle EAG = \angle HDG$, $\angle AEG = \angle DHG$. 所以 $\triangle AGE \cong \triangle DGH$ (ASA), 所以 $GH = GE$. 因为 $BH = HE$, 所以 $BG - GH = GE + GH$, 所以 $BG = 3GE$, 所以 $\frac{BG}{GE} = 3$.

(2) 7 提示: 解法 1 取 BC 的中点 H, 连接 EH, 则 $BH = CH$. 因为 $AB = AD = 9$, $AE \perp BD$ 于点 E, $CD = 3$, $AF = 8$, 所以 $BE = DE$, $AC = AD + CD = 12$, E 为 BD 的中点, 所以 EH 为 $\triangle BCD$ 的中位线, 所以 $EH \parallel CD$, $EH = \frac{1}{2} CD = \frac{3}{2}$. 所以 $\triangle EHF \sim \triangle ACF$, 所以 $\frac{EF}{AF} = \frac{EH}{AC} = \frac{\frac{3}{2}}{12} = \frac{1}{8}$, 所以 $EF = \frac{1}{8} AF = 1$, 所以 $AE = AF - EF = 7$.

解法 2 过点 D 作 $DH \parallel BC$ 交 AF 于点 H, 易证 $\triangle EDH \cong \triangle EBF$, 则 $EH = EF$. 因为 $DH \parallel BC$, 所以 $\frac{AH}{HF} = \frac{AD}{DC} = \frac{9}{3} = 3$. 又因为 $EH = EF$, 所以 $\frac{AF - 2EF}{2EF} = 3$, 所以 $EF = 1$, 所以 $AE = AF - EF = 7$.

(3) 10 提示: 解法 1 设 $\square ABCD$ 的面积为 S , 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD} = \frac{1}{2} S$. 因为 E 是 BC 的中点, 所以 $BE = CE = \frac{1}{2} BC$, 且 $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} S$. 连接 BD, 则 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} S$. 因为 $\frac{CF}{CD} = \frac{2}{5}$, 所以 $S_{\triangle BFC} = \frac{2}{5} S_{\triangle BCD} = \frac{1}{5} S$. 过点 E 作 $EN \parallel CD$ 交 BF 于点 N, 所以 $\triangle BNE \sim \triangle BFC$, 所以 $\frac{BE}{BC} = \frac{NE}{FC} = \frac{1}{2}$, 所以 $S_{\triangle BNE} = \left(\frac{NE}{FC}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 所以 $S_{\triangle BNE} = \frac{1}{4} S_{\triangle BFC} = \frac{1}{20} S$. 因为 $S_{\triangle BGE} = 2$, 所以 $S_{\triangle ENG} = S_{\triangle BNE} - S_{\triangle BGE} = \frac{1}{20} S -$

2. 又因为 $NE = \frac{1}{2}CF = \frac{1}{5}CD = \frac{1}{5}AB$, 所以 $\frac{NE}{AB} = \frac{1}{5}$. 因为 $NE \parallel CD \parallel AB$, 所以 $\triangle ENG \sim \triangle ABG$, 所以 $\frac{S_{\triangle ENG}}{S_{\triangle ABG}} = \left(\frac{EN}{AB}\right)^2 = \frac{1}{25}$, 所以 $S_{\triangle ABG} = 25S_{\triangle ENG} = 25 \cdot \left(\frac{1}{20}S - 2\right)$. 因为 $S_{\triangle ABG} + S_{\triangle BGE} = S_{\triangle ABE}$, 所以 $25 \cdot \left(\frac{1}{20}S - 2\right) + 2 = \frac{1}{4}S$, 解得 $S = 48$, 所以 $S_{\triangle ABG} = 25 \times \left(\frac{1}{20} \times 48 - 2\right) = 10$.

解法 2 过点 F 作 $FP \parallel BC$ 交 AC 于点 Q , 交 AE 于点 P . 易证 $\triangle CFQ \sim \triangle CDA$, $\triangle APQ \sim \triangle AEC$, $\triangle PGF \sim \triangle EGB$, 所以 $\frac{CQ}{CA} = \frac{QF}{AD} = \frac{CF}{CD} = \frac{2}{5}$, 所以 $\frac{PQ}{EC} = \frac{AQ}{AC} = \frac{3}{5}$, 所以 $\frac{AP}{EP} = \frac{AQ}{CQ} = \frac{3}{2}$. 因为 $\frac{PG}{EG} = \frac{PF}{EB} = \frac{PF}{EC} = \frac{PQ + QF}{EC} = \frac{PQ}{EC} + \frac{QF}{EC} = \frac{3}{5} + \frac{1}{2}AD = \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$, 设 $EG = 5a$, 则 $PG = 7a$, $PE = 12a$, 所以 $AP = \frac{3}{2}PE = 18a$, 所以 $AG = AP + PG = 25a$, 所以 $\frac{AG}{EG} = \frac{25a}{5a} = 5$, 所以 $S_{\triangle ABG} = 5S_{\triangle BEG} = 10$.

【解后反思】本题主要考查等腰三角形的“三线合一”、三角形的中位线定理、全等三角形的判定与性质、平行线分线段成比例定理、相似三角形的判定与性质、平行四边形的性质等知识,正确地作出所需要的辅助线是解题的关键.本题的关键是做出恰当的平行线,有第(1)问的铺垫可知应将两条线段中的一条用平行线进行分割,再借助相似分别找出三条线段之间的数量关系,最后进行合并.

28. 解: (1) 因为抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过 $A(0, 3), B(4, 3)$ 两点, 所以 $\begin{cases} c = 3, \\ 4^2 + 4b + c = 3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b = -4, \\ c = 3, \end{cases}$ 所以该抛物线的函数表达式为 $y = x^2 - 4x + 3$.

(2) ①当点 D 在直线 OB 的上方时,如图 1. 因为 $\angle BOC = \angle OBD$, 所以 $BD \parallel x$ 轴. 因为点 A 与点 B 对应的函数值都是 3, 即 $AB \parallel$

x 轴, 所以此时点 A 与点 D 重合, 即点 $D_1(0, 3)$;

②当点 D 在直线 OB 的下方时, 设 BD 与 x 轴交于点 M , 如图 2. 因为 $\angle BOC = \angle OBD$, 所以 $OM = BM$. 因为 BC 垂直 x 轴于点 C , 点 $B(4, 3)$, 所以点 $C(4, 0), OC = 4, BC = 3$. 设 $OM = BM = m$, 则 $CM = OC - OM = 4 - m$. 在 $Rt\triangle BCM$ 中, $CM^2 + BC^2 = BM^2$, 即 $(4 - m)^2 + 3^2 = m^2$, 解得 $m = \frac{25}{8}$, 所以点 $M\left(\frac{25}{8}, 0\right)$. 设直线 BD 的函数表达式为 $y = k_1x + b_1$, 将点 B, M 代入, 得

$$\begin{cases} 4k_1 + b_1 = 3, \\ \frac{25}{8}k_1 + b_1 = 0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k_1 = \frac{24}{7}, \\ b_1 = -\frac{75}{7}, \end{cases} \text{所以直线}$$

BD 的函数表达式为 $y = \frac{24}{7}x - \frac{75}{7}$. 将直线 BD 的函数表达式与抛物线的函数表达式

$$\text{联立, 得} \begin{cases} y = \frac{24}{7}x - \frac{75}{7}, \\ y = x^2 - 4x + 3, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = \frac{24}{7}, \\ y = \frac{51}{49}, \end{cases} \text{或}$$

$$\begin{cases} x = 4, \\ y = 3, \end{cases} \text{(舍去), 所以点 } D_2\left(\frac{24}{7}, \frac{51}{49}\right). \text{ 综上所述, 点 } D \text{ 的坐标为 } (0, 3) \text{ 或 } \left(\frac{24}{7}, \frac{51}{49}\right).$$

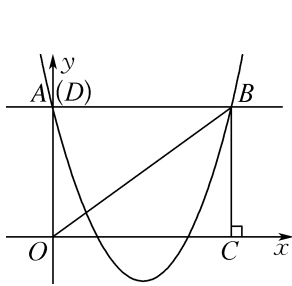


图 1

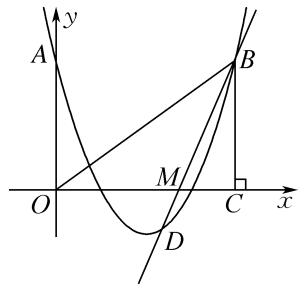
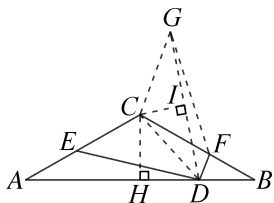


图 2

(3) $\frac{1}{OE} + \frac{1}{CF}$ 是定值, 该定值为 $\frac{4}{3}$. 理由如下: 令 $y = x^2 - 4x + 3 = 0$, 解得 $x_1 = 1, x_2 = 3$, 即抛物线与 x 轴的交点是 $(1, 0)$ 和 $(3, 0)$. 设点

DG 的长. 连接 DG, 作 $CH \perp AB$ 于点 H, $CI \perp DG$ 于点 I. 因为 $AD = 3\sqrt{3}$, $BD = \sqrt{3}$, 所以 $AB = AD + BD = 4\sqrt{3}$. 因为 $CH \perp AB$, $AC = BC$, 所以 $BH = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{3}$, 所以 $DH = BH - BD = \sqrt{3}$. 因为 $AC = BC$, $\angle ACB = 120^\circ$, 所以 $\angle B = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB) = 30^\circ$. 所以 $\tan B = \tan 30^\circ = \frac{CH}{BH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $CH = 2$. 所以 $CD = \sqrt{CH^2 + DH^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$. 因为 $CD = CG$, $\angle DCG = 120^\circ$, 所以 $\angle CDG = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DCG) = 30^\circ$. 因为 $CI \perp DG$, 所以 $\cos \angle CDI = \cos 30^\circ = \frac{DI}{CD}$, 所以 $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{DI}{\sqrt{7}}$, 所以 $DI = \frac{\sqrt{21}}{2}$, 所以 $DG = 2DI = \sqrt{21}$, 即 $DE + DF$ 的最小值是 $\sqrt{21}$.



【方法总结】通过平移、旋转等几何变换方法, 将分散的条件集中至同一三角形内, 是一种常见的技巧. 本题所求最值中, E, F 均为动点, 只有 D 为定点, 但顶角为 120° 的等腰三角形, 是通过旋转变换转化问题的典型图形. 于是, 旋转线段 CD, 将两条动线段集中至能确定第三边的三角形中, 从而根据“两点之间, 线段最短”的公理, 求得最值.

17. 解: (1) 原式 $= 3 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - (2 - \sqrt{3}) - 1 = 3 - \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} - 1 = 0$.

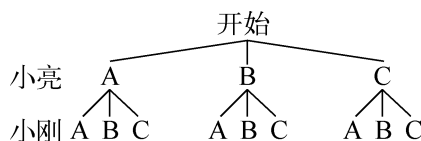
(2) 解 $\frac{2x-1}{5} \geq x-2$, 得 $x \leq 3$. 解 $2(x-2) < 3x$, 得 $x > -4$. 所以不等式组的解集为 $-4 < x \leq 3$, 正整数解为 1, 2, 3.

18. 解: 原式 $= \left[\frac{x-2}{x-1} - \frac{2(x-1)}{x-1} \right] \div \frac{x(x-3)}{(x-1)^2} = \frac{x-2-(2x-2)}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{x(x-3)} = \frac{-x}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{x(x-3)} = -\frac{x-1}{x-3}$. 因为 $0 \leq x \leq 3$ 且 x 不能取 0 或 1 或 3, 所以当 $x = 2$ 时, 原式 =

$$-\frac{2-1}{2-3} = 1.$$

19. 解: (1) $P(\text{小亮抽到卡片 A}) = \frac{1}{3}$.

(2) 画树状图如下:



共有 9 种等可能的结果, 两人都抽到卡片 C 的结果有 1 种, 所以 $P(\text{两人都抽到卡片 C}) = \frac{1}{9}$.

20. 解: (1) ① 4 667

② $\bar{x} = \frac{72 \times 1 + 70 \times 3 + 67 \times 3 + 64 \times 3}{1 + 3 + 3 + 3} =$

67.5(分), 所以 A 款新能源汽车四项评分数据的平均数为 67.5 分.

(2) 我推荐 B 款新能源汽车. 理由如下:

因为 B 款新能源汽车四项评分数据的平均分为 $\bar{x} = \frac{70 \times 1 + 71 \times 3 + 70 \times 3 + 68 \times 3}{1 + 3 + 3 + 3} = 69.7$ (分), 所以 B 款新能源汽车四项评分数据的平均分高于 A 款新能源汽车的平均分, 又因为 A 款新能源汽车销量一直下滑, 所以我推荐 B 款新能源汽车.

21. 证明: 因为四边形 ABCD 是平行四边形, 所以 $AD = BC$, $AD \parallel BC$, 所以 $\angle OBF = \angle ODE$. 因为 $AE = CF$, 所以 $DE = BF$. 在 $\triangle BOF$ 和 $\triangle DOE$ 中, $\begin{cases} \angle FOB = \angle EOD, \\ \angle OBF = \angle ODE, \\ BF = DE, \end{cases}$

以 $\triangle BOF \cong \triangle DOE$ (AAS), 所以 $OE = OF$.

22. 解: 延长 FE 交 CB 的延长线于点 M, 过点 A 作 $AG \perp FM$ 于点 G. 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $AB = BC \cdot \tan 75^\circ \approx 0.6 \times 3.7 = 2.22$ (m), 所以 $GM = AB = 2.22$ m. 在 $\text{Rt} \triangle AGF$ 中, 因为 $\angle FAG = \angle FHE = 60^\circ$, $\sin \angle FAG = \frac{FG}{AF}$, 所

以 $\sin 60^\circ = \frac{FG}{2.5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $FG \approx 2.125$ m, 所以 $DM = FG + GM - FD = 2.125 + 2.22 - 1.4 \approx 2.9$ (m).

答: 篮筐点 D 处到地面的距离是 2.9 m.

23. 解: (1) 设甲、乙两种书柜每个的价格分别是

$$x \text{ 元、} y \text{ 元. 由题意得 } \begin{cases} 5x + 2y = 1380, \\ 4x + 3y = 1440, \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} x = 180, \\ y = 240. \end{cases}$$

答: 甲种书柜单价为 180 元, 乙种书柜单价为 240 元.

(2) 设购买甲种书柜 m 个, 则购买乙种书柜 $(24 - m)$ 个, 所需资金为 w 元. 由题意得 $w = 180m + 240(24 - m) = -60m + 5760$, $24 - m \geq m$, 解得 $m \leq 12$. 因为 $-60 < 0$, 所以 w 随 m 的增大而减小. 因为 $0 \leq m \leq 12$, 所以当 $m = 12$ 时, w 取最小值, $w_{\min} = -60 \times 12 + 5760 = 5040$ (元).

答: 购买甲种书柜 12 个, 乙种书柜 12 个时, 资金最少, 最少资金为 5040 元.

24. 解: (1) 如图 1, 线段 BF 和点 G 即为所求.

提示: 在点 C 左侧取格点 F , 使 $CF = AE$, 连接 BF, EF . 在点 E 左侧取格点 P , 使 $PE = CF$, 连接 CP , 与 EF 交于点 Q , 连接 BQ 并延长, 与 CD 的交点即为点 G .

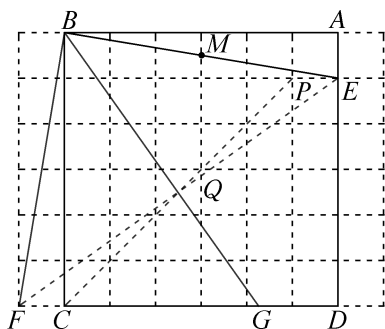


图 1

(2) 如图, 点 N 和点 H 即为所求. 提示: 取格点 K, Q , 连接 KQ 交网格于点 P , 连接 NP 交 BD 于点 H , 则 $BE \parallel NP$, $\angle MBH = \angle BHN$, 易证 $BN = BM$, $MH = NH$, $\angle MBH = \angle NBH$, 所以 $\angle BHN = \angle NBH$, 所以 $NH = BN = MH = BM$, 所以四边形 $BNHM$ 是菱形.

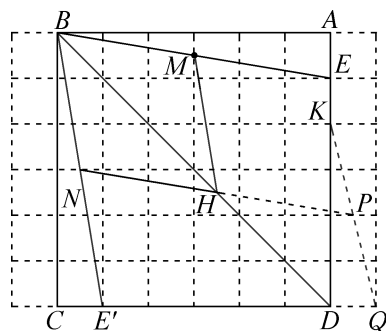


图 2

25. 解: (1) ① 因为 AB 是 $\odot O$ 的直径, $AB = 18$, 所以 $OA = OB = 9$. 设 $\angle AOP = \alpha^\circ$, 当 $t = 3$ 时, $\widehat{AP}$ 的长度为 3π , $\frac{\alpha}{180} \times \pi \times 9 = 3\pi$, 所以 $\alpha = 60$, 即 $\angle AOP = 60^\circ$.

② PC 与 $\odot O$ 相切. 理由如下:

连接 AP . 由 ① 可知, $\angle AOP = 60^\circ$, $OA = OP = 9$, 所以 $\triangle AOP$ 为等边三角形, 则 $\angle PAO = 60^\circ = \angle C + \angle APC$, $AP = OA = 9$. 又因为 $AC = OA$, 所以 $AC = AP$, 则 $\angle C = \angle APC = 30^\circ$. 则 $\angle CPO = 180^\circ - \angle C - \angle AOP = 90^\circ$, 所以 PC 与 $\odot O$ 相切.

(2) 由 (1) 可知, $OC = AC + OA = 18$, $OB = 9$. 由轴对称可知, $OD = OC = 18$, $\angle COP = \angle DOP$. 在 $\triangle BOD$ 中, $OB^2 + OD^2 = 9^2 + 18^2 = (9\sqrt{5})^2$. 因为 $BD^2 = (9\sqrt{5})^2$, 所以 $OB^2 + OD^2 = BD^2$, 所以 $\angle BOD = \angle AOD = 90^\circ$. 则 $\angle COP = \angle DOP = 45^\circ$, 则 $\widehat{AP}$ 的

度为 $t\pi$, $\frac{45}{180} \times \pi \times 9 = t\pi$, 解得 $t = \frac{9}{4}$.

26. 解: (1) 因为二次函数 $y = -x^2 + mx + n$ 图像经过点 $(2, 3)$, 所以 $-4 + 2m + n = 3$, 所以 $n = 7 - 2m$.

(2) ① 当 $m = 2$ 时, $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 1)^2 + 4$, 所以此时二次函数图像的顶点坐标为 $(1, 4)$.

② 因为函数表达式为 $y = -(x - 1)^2 + 4$, 所以抛物线开口向下, 对称轴为直线 $x = 1$. 所以当 $x = 1$ 时, 函数有最大值, 最大值为 4. 因为当 $t \leq x \leq 2$ 时, 总有 $2t \leq y \leq 4$, 所以 $t \leq 1$.

所以当 $x=t$ 时, $y=2t$ 或 $x=2$ 时, $y=2t$. 当 $x=t$ 时, $y=2t$, 则 $-t^2+2t+3=2t$, 解得 $t=-\sqrt{3}$ 或 $t=\sqrt{3}$ (舍去); 当 $x=2$ 时, $y=2t$, 则 $3=2t$, 解得 $t=\frac{3}{2}$ (舍去). 综上所述, $t=-\sqrt{3}$.

③由题意得, 平移后的函数表达式为 $y' = -(x-1)^2+4-t$. 当 $0 < t < 1$ 时, y' 随 x 的增大而增大, 当 $x=-1$ 时, $y'=-t$; 当 $x=t$ 时, $y'=-t^2+t+3$, 因为 $-3 \leq y' \leq 3$, 所以
$$\begin{cases} -t \geq -3, \\ -t^2+t+3 \leq 3, \end{cases}$$
 解得 $t \leq 0$ 或 $1 \leq t \leq 3$, 不符合题意, 舍去; 当 $t \geq 1$ 时, 则当 $x=1$ 时, $y' = 4-t$, 所以
$$\begin{cases} -t \geq -3, \\ -t^2+t+3 \geq -3, \\ 4-t \leq 3, \end{cases}$$
 解得 $1 \leq t \leq 3$.

综上所述, t 的取值范围是 $1 \leq t \leq 3$.

27. (1) 证明: 连接 CD . 因为 $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC$, 且当 $n=1$ 时, $AD = DB$, 所以 $AB = \sqrt{2}AC$, $\angle A = \angle B = \angle ACD = 45^\circ$, $AD = CD = BD$, $CD \perp AB$. 因为 $ED \perp FD$, 所以 $\angle EDF = \angle CDB = 90^\circ$, 所以 $\angle EDF - \angle CDF = \angle CDB - \angle CDF$, 即 $\angle CDE = \angle BDF$. 在 $\triangle CDE$ 和 $\triangle BDF$ 中,
$$\begin{cases} \angle ECD = \angle B, \\ CD = BD, \\ \angle CDE = \angle BDF, \end{cases}$$
 所以 $\triangle CDE \cong \triangle BDF$ (ASA), 所以 $CE = BF$. 所以 $AE + BF = AE + CE = AC = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$, 即 $AE + BF = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$.

(2) ① $AE + \frac{1}{2}BF = \frac{\sqrt{2}}{3}AB$.

证明: 如图 1, 过点 D 分别作 $DN \perp AC$ 于点 N , $DH \perp BC$ 于点 H . 因为 $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC$, 所以 $\angle A = \angle B = 45^\circ$. 因为 $DN \perp AC$,

$DH \perp BC$, 所以 $\triangle ADN$ 和 $\triangle BDH$ 是等腰直角三角形. 所以 $AN = DN$, $DH = BH$, $AD = \sqrt{2}AN$, $BD = \sqrt{2}BH$, $\angle A = \angle B = 45^\circ = \angle ADN = \angle BDH$. 所以 $\triangle ADN \sim \triangle BDH$, 所以 $\frac{AD}{BD} = \frac{AN}{BH} = \frac{1}{2}$. 设 $AN = DN = x$, $BH = DH = 2x$, 所以 $AD = \sqrt{2}x$, $BD = 2\sqrt{2}x$, 所以 $AB = 3\sqrt{2}x$. 因为 $DN \perp AC$, $DH \perp BC$, $\angle ACB = 90^\circ$, 所以四边形 $DHCN$ 是矩形. 所以 $\angle NDH = 90^\circ = \angle EDF$, 所以 $\angle EDN = \angle FDH$. 又因为 $\angle END = \angle FHD$, 所以 $\triangle EDN \sim \triangle FDH$, 所以 $\frac{EN}{FH} = \frac{DN}{DH} = \frac{1}{2}$, 所以 $FH = 2NE$, 所以 $AE + \frac{1}{2}BF = x + NE + \frac{1}{2}(2x - FH) = 2x = \frac{\sqrt{2}}{3}AB$.

② $AE + \frac{1}{n}BF = \frac{\sqrt{2}}{n+1}AB$.

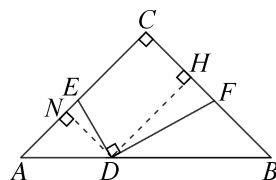


图 1

(3) 点 M 运动的路径长为 $\frac{2\sqrt{10}}{3}$. 提示: 连接 CM , DM , CD , 如图 2. 因为 M 为 EF 的中点, $\angle EDF = \angle ECF = 90^\circ$, 所以 $CM = DM = \frac{1}{2}EF$, 所以点 M 在线段 CD 的垂直平分线上. 因为 D 为靠近点 B 的四等分点, $AB = 4\sqrt{2}$, 所以 $DB = \sqrt{2}$, $CB = 4$. 又因为 $\angle DBC = 45^\circ$, 易得 $CD = \sqrt{10}$. ①当点 E 与点 A 重合时, 如图 3, 过点 M 作 $MH \perp DC$ 于点 H . 由 (2) 得 $AE + \frac{1}{n}BF = \frac{\sqrt{2}}{n+1}AB$. 因为 $\frac{AD}{BD} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3$, 所以 $AE + 3BF = \frac{3\sqrt{2}}{4}AB = 6$, 从而 $BF = 2$, 再得 $AF = 2\sqrt{5}$. 在 $\text{Rt}\triangle DHM$ 中, $DM = \sqrt{5}$, $DH = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 从而

$MH = \frac{\sqrt{10}}{2}$. ②当点 E 与点 C 重合时,如图 4,过点 M 作 $MH \perp DC$ 于点 H . 因为 $AE = AC = 4$, $AE + 3BF = 6$, 所以 $BF = \frac{2}{3}$, 所以 $CF = \frac{10}{3}$. 在 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中, $DF = \frac{\sqrt{10}}{3}$, 所以中位线 $MH = \frac{\sqrt{10}}{6}$, 所以点 M 运动的路径长为 $\frac{\sqrt{10}}{6} + \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$.

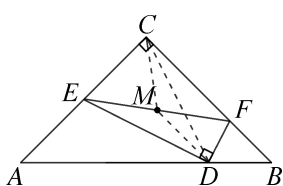


图 2

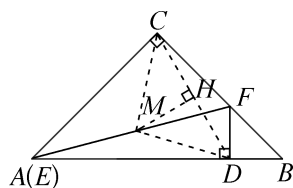


图 3

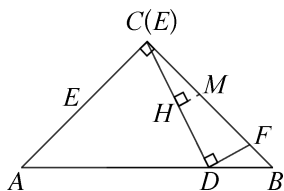


图 4

【方法总结】从特殊到一般是重要的数学思想. 本题由“两等分点”“三等分点”得到的结论, 归纳与猜想得到“ n 等分点”时的一般结论, 将此结论用于第(3)题的计算中, 而有关路径的计算问题, 通常是“三步曲”, 首先确定动点在何种图形上运动(线段或圆弧), 其次考虑“起始点”位置时的数量, 然后考虑“终止点”位置时的数量, 即可求得路径之长. 有关动点的路径, 遵循“瓜豆原理”的规律, 即“主动点”在直线(或圆)上运动, 则“从动点”也在直线(或圆)上运动.

D38* 连云港市 2024 年中考模拟优化卷

1. D 2. B 3. A 4. D 5. D 6. C

7. C 提示: 设 $OA = OB = AD = BC = x$ 寸, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , 则 $DE = 10$ 寸, $OE = \frac{1}{2}CD = 1$ 寸, $AE = (x-1)$ 寸. 在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $AE^2 + DE^2 = AD^2$, 即 $(x-1)^2 + 10^2 = x^2$, 解得 $2x = 101$. 故门槛 AB 的长为 101 寸.

8. C 提示: 由条件, 得“ k 优和点”满足 $y = -x + k (x > 0)$, 与二次函数联立, 得 $-x + k = x^2 + (k-3)x + 5$, 即 $x^2 + (k-2)x + 5 - k = 0$. 当根的判别式 $(k-2)^2 - 4(5-k) = 0$, 即 $k = \pm 4$ 时, 上述方程

有且只有一根, 但当 $k = 4$ 时, 上述方程化为 $x^2 + 2x + 1 = 0$, 此时 x 为负数, 不合题意, 故 $k = -4$; 当根的判别式 $(k-2)^2 - 4(5-k) > 0$, 即 $k > 4$ 或 $k < -4$ 时, 上述方程有两根, 其中一根大于 0, 另一根不大于 0, 故取 $x = 0$, 当 $k > 4$ 时, 左式 $= 5 - k < 0$, 得 $k > 5$, 当 $k < -4$ 时, 左式 $= 5 - k \leq 0$, 得 $k \geq 5$, 不合题意. 综上所述, k 的取值范围为 $k = -4$ 或 $k > 5$.

【误区警示】本题的关键是正确理解“ k 优和点”的定义, 究其本质, “ k 优和点”就是直线 $y = -x + k$ 在 y 轴右侧部分的点, 从而与二次函数联立后, 通过消元, 转化为一元二次方程, 因题中条件是“有且只有”一个“ k 优和点”, 故必须进行分类讨论. 第一种情形是所列方程“有且只有”一个根, 第二种情形是所列方程有两个根, 但一根不合题意, 所以必须考虑所列方程根的情况.

9. $x \neq 2$ 10. $2(a+2)(a-2)$

11. 1(答案不唯一) 12. 4.5 13. 53°

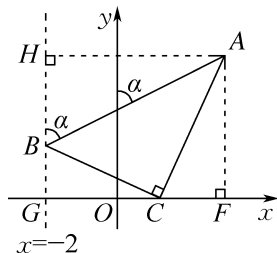
14. 72 提示: 连接 OM, ON . 易得 $\angle OMB = \angle ONC = 90^\circ$. 因为五边形 $ABCDE$ 是正五边形, 所以 $\angle B = \angle C = \frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 108^\circ$. 所以 $\angle MON = (5-2) \times 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 108^\circ - 108^\circ = 144^\circ$, 所以 $\angle MPN = \frac{1}{2} \angle MON = 72^\circ$.

15. 9 提示: 由题意可得, $2x^2 + 2x + 5 \leq ax^2 + bx + c \leq 3x^2 - x - 5$. 令 $x = -2$, 有 $8 - 4 + 5 \leq 4a - 2b + c \leq 12 + 2 - 5$, 所以 $9 \leq 4a - 2b + c \leq 9$, 所以 $4a - 2b + c = 9$.

16. $\frac{80}{39}$ 提示: 如图, 设直线 $x = -2$ 与 x 轴交于点 G , 过点 A 作 $AH \perp$ 直线 $x = 2$ 于点 H , $AF \perp x$ 轴于点 F , 所以 $AH = 5$. 因为 $BH \parallel y$ 轴, 所以 $\angle ABH = \alpha$. 在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, $\tan \alpha = \frac{5}{BH}$. 因为 $\tan \alpha$ 随 BH 的增大而减小, 所以当 BH 最小时, $\tan \alpha$ 有最大值, 即 BG 最大时, $\tan \alpha$ 有最大值. 因为 $\angle BGC = \angle ACB = \angle AFC = 90^\circ$, 所以 $\angle CBG + \angle BCG = \angle BCG + \angle ACF = 90^\circ$. 所以 $\angle CBG = \angle ACF$, 所以 $\triangle ACF \sim \triangle CBG$, 所以 $\frac{BG}{CF} = \frac{CG}{AF}$. 设 $BG = y$, 则 $\frac{y}{3-x} = \frac{x+2}{4}$, 所以 $y = \frac{1}{4}(x+2)(3-x) = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{16}$. 因为 $-\frac{1}{4} < 0$, 所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时, BG 取得最大值, 最大值

为 $\frac{25}{16}$, 此时, BH 取得最小值, $BH = 4 - \frac{25}{16} = \frac{39}{16}$, $\tan \alpha$

取得最大值, 最大值为 $\frac{5}{\frac{39}{16}} = \frac{80}{39}$.



【方法总结】有关最值问题, 通常有两类方法, 其一是几何法, 利用“垂线段最短”及“线段最短”等几何定理求之; 其二是函数法, 利用函数的性质求之. 本题中, 根据题意, $\tan \alpha$ 与 A, B 两点的“水平距离”及“铅垂距离”有关, 而“水平距离”为 5, 是定值, 故本题所求问题化归成求“铅垂距离”的最小值, 从图形分析, 此图特征是“一线三等角”, 故通过构造相似三角形, 再建立函数关系, 进而根据函数性质求其最值, 即可解决问题.

17. 解: 原式 $= \sqrt{3} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$.

18. 解: 解 $2x - 3 < \frac{x-4}{3}$, 得 $x < 1$. 在数轴上表示略.

19. 解: 原式 $= \frac{a}{(a+1)(a-1)} \div \left(\frac{a+1}{a+1} - \frac{1}{a+1} \right) = \frac{a}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{a+1}{a} = \frac{1}{a-1}$, 当 $a = \sqrt{2} + 1$ 时, 原式 $= \frac{1}{\sqrt{2} + 1 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

20. 解: (1) 14 0.15 40

(2) 补全频数分布直方图略.

(3) $600 \times (0.225 + 0.15) = 225$ (名)

答: 估计该校九年级学生平均每天体育活动时间不低于 120 min 的人数为 225.

21. 解: (1) 随机 (2) 列表如下:

数字	1	2	3
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)

共有 9 种等可能的结果, 其中两次记录数字之和小于 5 的结果有: (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1), 共 6 种, 所以两次记录数字之和小于 5 的概率为 $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

22. 解: (1) 过点 D 作 $DM \perp AF$, 垂足为 M . 在 $\text{Rt} \triangle ADM$ 中, $AD = 10$, $\angle DAF = 37^\circ$, 所以 $DM = AD \cdot \sin 37^\circ \approx 10 \times \frac{3}{5} = 6$ (m), 即点 D 到 BF 的距离约为 6 m.

(2) 过点 D 作 $DH \perp BC$, 垂足为 H . 由题意, 得 $DM = BH = 6$ m, $DH = BM$, 所以 $AM = AD \cdot \cos 37^\circ \approx 10 \times \frac{4}{5} = 8$ (m). 设 $BC = x$ m, 则 $BE = BC + EC = (x + 24)$ m, 所以 $EH = BE - BH = x + 24 - 6 = (x + 18)$ m. 因为 $\angle ACB = 53^\circ$, 所以 $\angle BAC = 37^\circ$. 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $AB = \frac{BC}{\tan 37^\circ} \approx \frac{4x}{3}$ (m), 所以 $BM = DH = AB + AM = \left(\frac{4x}{3} + 8 \right)$ m. 在 $\text{Rt} \triangle DEH$ 中, $\angle BED = 45^\circ$, 所以 $DH = EH = (x + 18)$ m, 所以 $\frac{4x}{3} + 8 = x + 18$, 解得 $x = 30$, 所以 $AB = \frac{4x}{3} = 40$ (m).

23. 解: (1) 将点 $A(1, a)$ 代入 $y = -x + 5$, 得 $a = -1 + 5 = 4$, 所以点 $A(1, 4)$. 将点 $A(1, 4)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$, 解得 $k = 4$, 所以反比例函数表达式为 $y = \frac{4}{x}$.

(2) $0 < x \leq 1$ 或 $x \geq 4$ 提示: 联立 $-x + 5 = \frac{4}{x}$, 解得 $x = 1$ 或 $x = 4$. 经检验, $x = 1$ 或 $x = 4$ 是原分式方程的解. 将 $x = 4$ 代入 $y = \frac{4}{x}$, 得 $y = 1$, 所以点 $B(4, 1)$, 所以由图像可知, $-x + 5 \leq \frac{4}{x}$ 的解集为 $0 < x \leq 1$ 或 $x \geq 4$.

(3) $b = 1$ 或 $b = 9$. 提示: 由题意知, 平移后的函

数表达式为 $y = -x + 5 - b$, 联立, 得 $-x + 5 - b = \frac{4}{x}$, 整理, 得 $x^2 - (5-b)x + 4 = 0$. 因为图像只有一个交点, 所以根的判别式 $(5-b)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$, 解得 $b = 1$ 或 $b = 9$, 所以 b 的值为 1 或 9.

24. (1) $AB = AD, AD \parallel BC (AD \neq BC)$ BD 平分 $\angle ABC$

证明: 因为 $AB = AD$, 所以 $\angle ABD = \angle BDA$. 又因为 $AD \parallel BC$, 所以 $\angle DBC = \angle BDA$. 所以 $\angle ABD = \angle DBC$, 即 BD 平分 $\angle ABC$.

(2) 解: ①作法 1 如图 1, “仿菱形 $ABDE$ ” 即为所求.

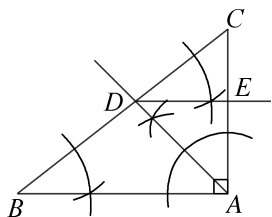


图 1

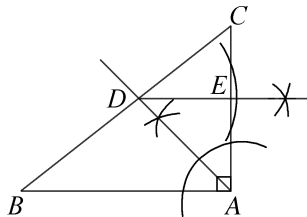


图 2

作法 2 如图 2, “仿菱形 $ABDE$ ” 即为所求.

②因为 $DE \parallel AB$, 所以 $\triangle CED \sim \triangle CAB$, 所以 $\frac{DE}{BA} = \frac{CE}{CA}$. 因为 $AB = 8, AC = 6, EA = ED$, 所以 $\frac{DE}{8} = \frac{6-DE}{6}$, 所以 $DE = \frac{24}{7}$.

25. 解: (1) $y = -3x^2 + 60x \quad 10 \leq x < 20$

提示: 因为 $AB = x$ m, 所以 $BC = (60 - 3x)$ m, 所以矩形 $ABCD$ 的面积 $y = AB \cdot BC = x(60 - 3x) = -3x^2 + 60x$. 因为 $\begin{cases} 0 < 60 - 3x \leq 30, \\ x > 0, \end{cases}$ 所以 $10 \leq x < 20$.

(2) 因为 $y = -3x^2 + 60x$, 所以 $a = -3 < 0$, 所以抛物线开口向下. 对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{60}{2 \times (-3)} = 10$, 因为 $10 \leq x < 20$, 所以

y 随 x 的增大而减小. 所以当 $x = 10$ 时, y 最大, 最大值为 $-3 \times 10^2 + 60 \times 10 = 300$, 所以矩形花圃 $ABCD$ 面积的最大值为 300 m^2 .

(3) 当 $x = 10$ 时, $AB = EF = CD = 10$ m, $BC = 30$ m. 设 $CF = t$ m, 则 $BF = (30 - t)$ m, 则 $S_1 = 10(30 - t) \text{ m}^2, S_2 = 10t \text{ m}^2$, 所以 $W_1 = 30 \times$

$10(30 - t) = 9000 - 300t, W_2 = -(10t)^2 + 320 \times 10t = -100t^2 + 3200t$. 因为两种鲜花的年收入之和达到 28 800 元, 所以 $9000 - 300t + (-100t^2 + 3200t) = 28800$, 解得 $t_1 = 18, t_2 = 11$.

答: CF 的长为 18 m 或 11 m.

26. 解: (1) $-2 \quad (1, -4)$

(2) 由题意, 得抛物线 L 的顶点坐标为 $(0, 2)$. 因为原抛物线的顶点坐标为 $(1, -4)$, 所以点 P 移动的最短路程为顶点 $(1, -4)$ 移动到 $(0, 2)$ 的距离, 所以最短距离为 $\sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37}$.

(3) MN 的长为定值, 定值为 4. 因为点 $A(-1, 0), B(3, 0)$, 点 M 到 x 轴的距离为 a , 所以 $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \times 4 \times a = 2a$. 因为 $S_{\triangle AMN} = 2a$, 所以 $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle AMN}$. 因为 $\triangle ABM$ 和 $\triangle AMN$ 有同底 AM , 所以点 B, N 到直线 AM 的距离相等. 所以 $AM \parallel BN$, 所以 $\angle MAN = \angle ANB, \angle AMB = \angle MBN, \angle ABC = \angle MAB$. 因为 $\angle ANB = \angle MBN$, 所以 $\angle MAN = \angle AMB$. 因为 $\tan \angle ABC = \frac{OC}{OB} = \frac{3}{3} = 1, \tan \angle AMN = 1$, 所以 $\angle ABC = \angle AMN$, 所以 $\angle MAB = \angle AMN$. 在 $\triangle MAB$

和 $\triangle AMN$ 中, $\begin{cases} \angle AMB = \angle MAN, \\ AM = MA, \\ \angle MAB = \angle AMN, \end{cases}$ 所以 $\triangle MAB \cong \triangle AMN (ASA)$, 所以 $MN = AB = 4$, 所以 MN 的长为定值, 定值为 4.

27. 解: (1) $6 \quad \frac{1}{4}$

证法 1 如图 1, 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E , 过点 B 作 $BF \perp AC$ 于点 F . 易得 $DE = OD \cdot \sin \angle DOE, BF = OB \cdot \sin \angle BOF$. 所以 $S_1 = \frac{1}{2} OC \cdot DE = \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin \angle DOE, S_2 = \frac{1}{2} OA \cdot BF = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \angle BOF$. 因为

$\angle DOE = \angle BOF$, 所以 $\sin \angle DOE = \sin \angle BOF$,

$$\text{所以 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{OC \cdot OD}{OA \cdot OB}.$$

证法 2 如图 1, 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E , 过点 B 作 $BF \perp AC$ 于点 F . 可证 $\triangle DEO \sim \triangle BFO$, 所以 $\frac{DE}{BF} = \frac{OD}{OB}$. 因为 $S_1 = \frac{1}{2} OC \cdot$

$$DE, S_2 = \frac{1}{2} OA \cdot BF, \text{ 所以 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{OC \cdot DE}{OA \cdot BF} =$$

$$\frac{OC}{OA} \cdot \frac{DE}{BF} = \frac{OC}{OA} \cdot \frac{OD}{OB} = \frac{OC \cdot OD}{OA \cdot OB}.$$

$$\frac{OC}{OA} \cdot \frac{DE}{BF} = \frac{OC}{OA} \cdot \frac{OD}{OB} = \frac{OC \cdot OD}{OA \cdot OB}.$$

证法 3 易证 $\triangle COD \sim \triangle AOB$, 所以 $\frac{S_1}{S_2} =$

$$\frac{OD^2}{OB^2} = \frac{OC^2}{OA^2}, \text{ 所以 } \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{OC^2 \cdot OD^2}{OA^2 \cdot OB^2}, \text{ 所以}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{OC \cdot OD}{OA \cdot OB}.$$

(2) (1) 中的结论成立.

证明: 如图 2, 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E , 过点 B 作 $BF \perp AC$ 于点 F , 所以 $DE = OD \cdot \sin \angle DOE$, $BF = OB \cdot \sin \angle BOF$, 所以

$$S_1 = \frac{1}{2} OC \cdot DE = \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin \angle DOE,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} OA \cdot BF = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \angle BOF.$$

因为 $\angle DOE = \angle BOF$, 所以 $\sin \angle DOE =$

$$\sin \angle BOF, \text{ 所以 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{OC \cdot OD}{OA \cdot OB}.$$

(3) 如图 3, 过点 A 作 $AM \parallel EF$ 交 OB 于点 M , 取 BM 的中点 N , 连接 HN . 因为 $EF \parallel CD$, 所以 $\angle ODC = \angle OFE$, $\angle OCD = \angle OEF$. 又因为 $OC = OE$, 所以 $\triangle OCD \cong \triangle OEF$ (AAS), 所以 $OD = OF$. 因为 $EF \parallel AM$, 所以 $\triangle OEF \sim \triangle OAM$, 所以 $\frac{OF}{OM} =$

$$\frac{OE}{OA} = \frac{5}{6}. \text{ 设 } OE = OC = 5m, OF = OD = 5n,$$

则 $OA = 6m, OM = 6n$. 因为 H 是 AB 的中点, N 是 BM 的中点, 所以 HN 是 $\triangle ABM$ 的中位线. 所以 $HN \parallel AM \parallel EF$, 所以 $\triangle OGF \sim \triangle OHN$, 所以 $\frac{OG}{OH} = \frac{OF}{ON}$. 因为 $OG = 2GH$, 所以

$$\frac{OG}{OH} = \frac{OF}{ON}. \text{ 因为 } OG = 2GH, \text{ 所以}$$

$$\text{以 } OG = \frac{2}{3} OH. \text{ 所以 } \frac{OF}{ON} = \frac{OG}{OH} = \frac{2}{3}, \text{ 所以}$$

$$ON = \frac{3}{2} OF = \frac{15n}{2}. \text{ 所以 } BN = MN = ON -$$

$$OM = \frac{15n}{2} - 6n = \frac{3n}{2}, \text{ 所以 } OB = ON + BN =$$

$$\frac{15n}{2} + \frac{3n}{2} = 9n. \text{ 由 (2) 得 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{OC \cdot OD}{OA \cdot OB} =$$

$$\frac{5m \cdot 5n}{6m \cdot 9n} = \frac{25}{54}.$$

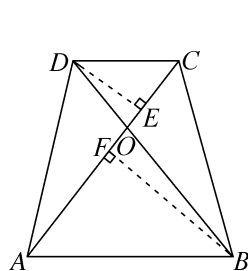


图 1

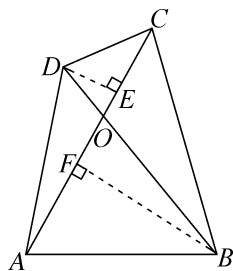


图 2

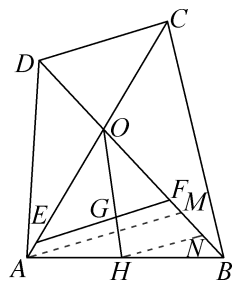


图 3

【方法总结】 本题属于初高中衔接的一类试题, 其实质是考查高中的正弦定理及面积公式. “求面积, 找底高”, 利用初中阶段学习的“解直角三角形”知识化归, 即可证之; 同理, 如利用“相似三角形的面积比等于相似比的平方”等知识也可证得, 作已知直线的平行线, 是有关比例线段关系的有效方法, 本题第(3)问就是如此化归.